

Министерство науки и высшего образования РФ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

**Б1.В.09 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

Направление подготовки (специальность) 03.05.02 Фундаментальная и прикладная физика

Профиль подготовки (специализация)

Форма обучения очная

Год набора 2024

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

Программу составили  
доцент, канд. техн. наук Конищева О.В.

## 1 Цели и задачи изучения дисциплины

### 1.1 Цель преподавания дисциплины:

Знания сопротивления материалов являются актуальными при проектировании и эксплуатации элементов конструкций.

Сопротивление материалов – учебная дисциплина, изучающая основы инженерных методов расчета на прочность, жесткость и устойчивость. Основными целями преподавания дисциплины является обеспечение базовой подготовки, включающей:

– фундаментальную подготовку в области расчетов элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость;

– приобретение навыков расчетной и экспериментальной работы с применением классических и современных методов расчета конструкций и механических испытаний;

– получение опыта самостоятельной работы над актуальными научно-техническими задачами в области прикладной механики.

Программой курса предусматривается изучение характеристик механических свойств конструкционных материалов, процессов деформирования и разрушения, методов анализа напряженно-деформированного состояния элементов конструкций и условий накопления предельного состояния материалов и конструкций, методов расчета и анализа конструкционной прочности элементов конструкций.

Сопротивление материалов является составной частью механики деформируемого твердого тела, опирается на общие законы механики, математический аппарат, физические закономерности, материаловедение и служит основой для таких дисциплин, как «Детали машин и основы конструирования», а также специальных дисциплин.

### 1.2 Задачи изучения дисциплины:

Задачами дисциплины «Сопротивление материалов» являются освоение теории и практических методов расчета на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций и машин, необходимых как при изучении дальнейших дисциплин, так и в практической деятельности механиков, ознакомление с современными подходами к расчету сложных систем, элементами рационального проектирования конструкций.

1.3 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы высшего образования:

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Запланированные результаты обучения по дисциплине
ПК-3	Способен разрабатывать и применять новые материалы, исследовать их структуру и свойства

<p>ПК-3.1 Планирует процессы получения материалов и исследования их свойств</p>	<p>Знать:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- законы и положения сопротивления материалов, физические свойства материалов;</li> <li>- принципы сопротивления конструкционных материалов;</li> <li>- принципы статической работы и основы расчета типовых элементов конструкций</li> </ul> <p>Уметь:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- составлять механико-математические модели типовых элементов конструкции, использовать их при расчетах на прочность, жесткость и устойчивость, оценивать прочностную надежность элементов конструкций</li> </ul> <p>Владеть:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- инженерными методами расчета типовых элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость, основами проектных расчетов элементов конструкций</li> </ul>
<p>ПК-3.2 Анализирует перспективные материалы и их нано-, микро-, мезо- и макромасштабные свойства</p>	<p>Знать:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- физические и механические свойства материалов, основные характеристики физических и механических свойств</li> </ul> <p>Уметь:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- использовать знания о свойствах материалов для решения проектных задач</li> </ul> <p>Владеть:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- навыками проектных расчетов с учетом геометрических характеристик, физических и механических свойств материалов</li> </ul>

Дисциплина реализуется без применения ЭО и ДОТ

## 2 Объем дисциплины (модуля)

Вид учебной работы	Всего, зачетных единиц (акад.час)	Семестр
		8
<b>Общая трудоемкость дисциплины</b>	3 (108)	3 (108)
<b>Контактная работа с преподавателем:</b>	2 (72)	2 (72)
занятия лекционного типа	1 (36)	1 (36)
практические занятия	1 (36)	1 (36)
<b>Самостоятельная работа обучающихся</b>	1 (36)	1 (36)
<b>Вид промежуточной аттестации (Зачет)</b>		Зачёт

### 3 Содержание дисциплины (модуля)

№ п/п	Вид работ	Темы занятия	Объем часов	Семестр /курс	Часы в эл. формате
<b>Раздел 1. 1 Введение</b>					
1.	Лек	Тема 1.1 Основные понятия. Цели и задачи учебной дисциплины «Сопротивление материалов» (СМ). Классификация конструкций по геометрическим параметрам: расчетные схемы в виде бруса, пластины и оболочки, массива. Классификация стержневых систем. Понятие о фермах, плоских и пространственных рамах, кривом брус. Классификация внешних воздействий: сосредоточенные силы, распределенная нагрузка и моменты. Опорные устройства и реактивные усилия. Уравнения равновесия для нахождения реактивных и внутренних усилий. Внутренние усилия и метод сечений для их вычисления. Понятие о напряжениях: полные, нормальные, касательные. Понятие о деформациях (линейных и угловых) и перемещениях. Общий вид условий прочности и жесткости. Основные гипотезы СМ.	2	8	
2.	Лек	Тема 1.2 Виды простого и сложного сопротивления. Определение 4-х видов простого сопротивления: растяжение (сжатие), сдвиг, кручение, изгиб. Понятие о сложном сопротивлении.	2	8	
<b>Раздел 2. 2 Центральное растяжение (сжатие) прямого стержня</b>					
1.	Лек	Тема 2.1 Расчеты центрально растянутого (сжатого) прямого стержня. Определение центрального растяжения (сжатия). Продольная нагрузка в общем виде, продольная сила и ее эпюры. Нормальные напряжения в поперечном сечении. Условие прочности и три вида расчетов: проекторочный, поверочный, определение допускаемой нагрузки. Деформации продольные и поперечные, коэффициент Пуассона. Перемещения поперечных сечений и их эпюры. Условие жесткости. Статически неопределимые задачи при растяжении (сжатии) и методика раскрытия неопределимости. Принцип Сен-Венана. Брус равного сопротивления. Предельное состояние и расчет по несущей способности.	6	8	
2.	Пр	Расчет статически определимых и неопределимых стержневых систем при растяжении и сжатии	6	8	
3.	Пр	Расчет статически определимого и статически неопределимого ступенчатого брусев при растяжении и сжатии	6	8	
4.	Лек	Тема 2.2 Экспериментальное изучение механических характеристик материалов. Диаграммы растяжения малоуглеродистой и легированной стали, чугуна. Характеристики прочности (пределы пропорциональности, упругости, текучести, прочности и напряжение разрыва) и пластичности (остаточные удлинение образца и сужение шейки, работа разрыва). Закон Гука, модуль продольной упругости (модуль Юнга). Опасные и допускаемые напряжения, коэффициент запаса прочности.	6	8	
5.	Ср	Изучение теоретического курса (ТО)	4	8	
6.	Ср	Выполнение расчетно-графических заданий	5	8	
7.	Ср	Выполнение тестовых заданий в интерактивной форме	4	8	
<b>Раздел 3. 3 Геометрические характеристики плоских сечений</b>					
1.	Лек	Тема 3.1 Основные определения и общие свойства геометрических характеристик. Центр тяжести и статические моменты простых и составных сечений. Моменты сопротивления. Понятие о моменте инерции. Вычисление моментов инерции простых и составных сечений.	2	8	
2.	Пр	Геометрические характеристики симметричных и несимметричных сечений	2	8	

3.	Лек	Тема 3.2 Главные моменты инерции. Изменения моментов инерции при параллельном переносе и повороте осей. Определение положения главных осей. Вычисление главных моментов инерции. Графическое определение моментов инерции. Графическое представление моментов инерции, понятие о радиусе и эллипсе инерции.	2	8	
4.	Ср	Изучение теоретического курса (ТО)	1	8	
5.	Ср	Выполнение расчетно-графических заданий	2	8	
6.	Ср	Выполнение тестовых заданий в интерактивной форме	1	8	
<b>Раздел 4. 4 Сдвиг и кручение</b>					
1.	Лек	Тема 4.1 Сдвиг. Понятие о чистом сдвиге. Диаграмма касательных напряжений, закон Гука, модуль упругости при сдвиге. Допускаемое касательное напряжение и условие прочности. Примеры соединений, разрушающихся срезом: заклепочных, болтовых и сварных соединений; скалывание в деревянных соединениях; деформации сдвига и среза в технологических операциях. Расчет заклепочных и болтовых соединений.	2	8	
2.	Лек	Тема 4.2 Кручение. Определение кручения. Скручивающая нагрузка в общем виде, крутящие моменты и их эпюры. Касательные напряжения в поперечном сечении и углы закручивания вала. Условия прочности и жесткости вала. Рациональные формы сечений. Статически неопределимые задачи при кручении. Состояние текучести, понятие о разрушающем моменте и предельном состоянии. Условие прочности по несущей способности.	2	8	
3.	Пр	Расчет статически определимого и статически неопределимого вала при кручении	6	8	
4.	Ср	Изучение теоретического курса (ТО)	3	8	
5.	Ср	Выполнение расчетно-графических заданий	4	8	
6.	Ср	Выполнение тестовых заданий в интерактивной форме	3	8	
<b>Раздел 5. 5 Плоский изгиб</b>					
1.	Лек	Тема 5.1 Расчеты балок на прочность и жесткость. Определение плоского изгиба. Виды опор балок и нахождение опорных реакций. Изгибающая нагрузка в общем виде, внутренние усилия в балках (поперечная сила и изгибающий момент), их эпюры. Дифференциальные зависимости между внутренними усилиями и интенсивностью нагрузки. Эпюры в 6-ти простых балках. Нормальные напряжения при чистом изгибе, их эпюра по высоте сечения. Условие прочности, рациональные формы сечений для пластичного и хрупкого материалов. Касательные напряжения при поперечном изгибе, эпюра напряжений по высоте сечения. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балок и его интегрирование для определения перемещений. Метод начальных параметров для перемещений. Условия жесткости балок.	12	8	
2.	Пр	Построение эпюр внутренних усилий в балках при поперечном изгибе и проектный расчет балок.	4	8	
3.	Пр	Построение эпюр внутренних усилий в балках при поперечном изгибе и определение несущей способности балок.	4	8	
4.	Пр	Построение эпюр внутренних усилий в балках при поперечном изгибе и проверка прочности балок.	4	8	
5.	Пр	Определение перемещений в балках, проверка жесткости	4	8	
6.	Ср	Изучение теоретического курса (ТО)	2	8	
7.	Ср	Выполнение расчетно-графических заданий	5	8	
8.	Ср	Выполнение тестовых заданий в интерактивной форме	2	8	
9.	Зачёт	Зачет		8	

## **4 Учебно-методическое обеспечение дисциплины**

### **4.1 Печатные и электронные издания:**

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П., Александров А.В. Сопротивление материалов [Электронный ресурс]:учеб. для вузов. - Москва: Высшая школа, 2004. - 560 с. – Режим доступа: [http://lib3.sfu-kras.ru/ft/lib2/elib\\_dc/fulltext\\_bas/close/elcoll/grado/4.pdf](http://lib3.sfu-kras.ru/ft/lib2/elib_dc/fulltext_bas/close/elcoll/grado/4.pdf).

2. Куликов Ю. А. Сопротивление материалов. Курс лекций [Электронный ресурс]:. - Москва: Лань, 2017. - – Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/91882> .

3. Трошин С. И., Шатохина Л. П., Федорова Е. Н., Зырянов И. А. Сопротивление материалов [Электронный ресурс]:сб. заданий. - Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2004. - 64 с. – Режим доступа: <http://lib3.sfu-kras.ru/ft/lib2/elib/u53/i-142966.pdf> .

4. Шатохина Л. П., Сигова Е. М. Сопротивление материалов. Расчеты при простом сопротивлении [Электронный ресурс]:учеб. пособие. - Красноярск: ИПК СФУ, 2010. - 190 с. – Режим доступа: <http://lib3.sfu-kras.ru/ft/lib2/elib/u53/i-246010.pdf> .

5. Шатохина Л. П., Богомаз И. В., Мартынова Т. П., Федорова Е. Н., Козлов В. И., Фадиенко Л. П., Чернякова Н. А., Белозерова Я. Ю., Буров А. Е., Зырянов И. А., Трошин С. И., Дегтярев И. Н. Сопротивление материалов [Электронный ресурс]:электрон. учеб.-метод. комплекс дисциплины. - Красноярск: СФУ, 2008. - on-line – Режим доступа: [http://lib3.sfu-kras.ru/ft/lib2/ELIB\\_DC/UMKD/i-501966.zip](http://lib3.sfu-kras.ru/ft/lib2/ELIB_DC/UMKD/i-501966.zip) .

**4.2 Лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение, в том числе отечественного производства (программное обеспечение, на которое университет имеет лицензию, а также свободно распространяемое программное обеспечение):**

1. Microsoft Windows Professional 10 Russian. Операционная система Windows.

2. Microsoft Office Professional Plus 2010 Russian. Офисный пакет Microsoft Office.

3. Adobe Acrobat Reader DC . Программное обеспечение для просмотра и печати файлов PDF.

**4.3 Интернет-ресурсы, включая профессиональные базы данных и информационные справочные системы:**

1. Сопротивление материалов: электронный обучающий курс

URL: <https://e.sfu-kras.ru/course/view.php?id=949>

## **5 Фонд оценочных средств**

Фонд оценочных средств является приложением к рабочей программе дисциплины (модуля), хранится на кафедре, обеспечивающей преподавание данной дисциплины (модуля).

**6 Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

учебная аудитория для проведения лекционных, семинарских и практических занятий: Специализированная мебель, демонстрационное оборудование, АРМ преподавателя, подключение к сети «Интернет» и индивидуальный неограниченный доступ в ЭИОС университета

помещение для самостоятельной работы обучающихся: специализированная мебель, демонстрационное оборудование, АРМ преподавателя, АРМ обучающихся, подключение к сети «Интернет» и индивидуальный неограниченный доступ в ЭИОС университета

Министерство науки и высшего образования РФ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

### **ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

По дисциплине (модулю)/ практике Б1.В.09 Сопротивление материалов

Направление подготовки/специальность

03.05.02 Фундаментальная и прикладная физика

Образовательная программа

03.05.02.30 Фундаментальная и прикладная физика

**1. Перечень компетенций с указанием индикаторов их достижения, соотнесенных с результатами обучения по дисциплине (модулю), практики и оценочными средствами**

Семестр <sup>1</sup>	Код и содержание индикатора компетенции	Результаты обучения <sup>2</sup>	Оценочные средства <sup>3</sup>
ПК-3: Способен разрабатывать и применять новые материалы, исследовать их структуру и свойства			
8	ПК-3.1: Планирует процессы получения материалов и исследования их свойств	Знать: - законы и положения сопротивления материалов, физические свойства материалов; - принципы сопротивления конструкционных материалов; - принципы статической работы и основы расчета типовых элементов конструкций	Тестовые задания; Вопросы к зачету; Индивидуальные задания
		Уметь: - составлять механико-математические модели типовых элементов конструкции, использовать их при расчетах на прочность, жесткость и устойчивость, оценивать прочностную надежность элементов конструкций	Тестовые задания; Вопросы к зачету; Индивидуальные задания
		Владеть: - инженерными методами расчета типовых элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость, основами проектных расчетов элементов конструкций	Тестовые задания; Вопросы к зачету; Индивидуальные задания
8	ПК-3.2: Анализирует перспективные материалы и их нано-, микро-, мезо- и макромасштабные	Знать: - физические и механические свойства материалов, основные характеристики физических и механических свойств	Тестовые задания; Вопросы к зачету; Индивидуальные задания

<sup>1</sup> Семестры указываются по порядку, для каждого индикатора

<sup>2</sup> Указываются результаты обучения по дисциплине (модулю), практике, соотнесенные с индикатором достижения компетенции.

<sup>3</sup> Указываются оценочные средства для каждого индикатора.

	свойства	Уметь: - использовать знания о свойствах материалов для решения проектных задач	Тестовые задания; Вопросы к зачету; Индивидуальные задания
		Владеть: - навыками проектных расчетов с учетом геометрических характеристик, физических и механических свойств материалов	Тестовые задания; Вопросы к зачету; Индивидуальные задания

## **2. Типовые оценочные средства или иные материалы, с описанием шкал оценивания и методическими материалами, определяющими процедуру проведения и оценивания достижения результатов обучения**

### **2.1 Перечень вопросов для промежуточной аттестации**

1. Задачи курса. Основные определения. Перемещения. Деформации.
2. Основные гипотезы курса. Виды внешних нагрузок.
3. Внутренние силы. Метод сечений.
4. Напряжения. Связь напряжений с внутренними силами.
5. Растяжение и сжатие прямого стержня. Напряжения в поперечных и наклонных сечениях стержней.
6. Деформированное состояние при растяжении-сжатии. Деформации. Коэффициент Пуассона.
7. Закон Гука. Модуль упругости. Определение осевых перемещений. Жесткость при растяжении-сжатии. Потенциальная энергия деформации при растяжении-сжатии.
8. Построение эпюр продольных сил, нормальных напряжений и осевых перемещений поперечных сечений (показать на примерах).
9. Диаграммы растяжения и сжатия пластичных и хрупких материалов.
10. Кручение стержня. Напряжения при кручении.
11. Угол закручивания при кручении. Жесткость при кручении. Потенциальная энергия при кручении.
12. Расчет на прочность при кручении. Эпюры крутящих моментов, касательных напряжений и углов закручивания (пример).
13. Геометрические характеристики плоских сечений.
14. Зависимость между моментами инерции при параллельном переносе осей и при повороте осей на угол.
15. Главные оси и главные моменты инерции. Определение главных осей и главных моментов инерции составных сечений.
16. Понятие изгиба. Виды изгиба. Определение внутренних силовых факторов.
17. Дифференциальные зависимости между внутренними силовыми факторами и интенсивностью нагрузки при изгибе.

18. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов при изгибе и особенности построения (примеры).
19. Нормальные напряжения при изгибе.
20. Касательные напряжения при изгибе.
21. Расчеты на прочность при изгибе.
22. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки и его интегрирование.
23. Метод начальных параметров.
24. Устойчивость сжатых стержней.
25. Анализ напряженного состояния. Расчет по теориям прочности.
26. Сложное сопротивление.

### Методические рекомендации для зачета:

Конечным результатом промежуточной аттестации по дисциплине является зачет.

Допуском к зачету является выполнение и защита всех видов работ, предусмотренных рабочей программой дисциплины.

Форма проведения зачета - устный опрос по билетам. В билет включаются два теоретических вопроса из разных разделов программы.

### Критерии оценивания зачета:

Оценка	Требования
«Зачтено»	Оценка «зачтено» выставляется студенту, если он глубоко и прочно усвоил программный материал, исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно его излагает, умеет тесно увязывать теорию с практикой, свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний, причем не затрудняется с ответом при видоизменении заданий, использует в ответе материал разнообразных литературных источников.
«Незачтено»	Оценка «незачтено» выставляется студенту, который не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки.

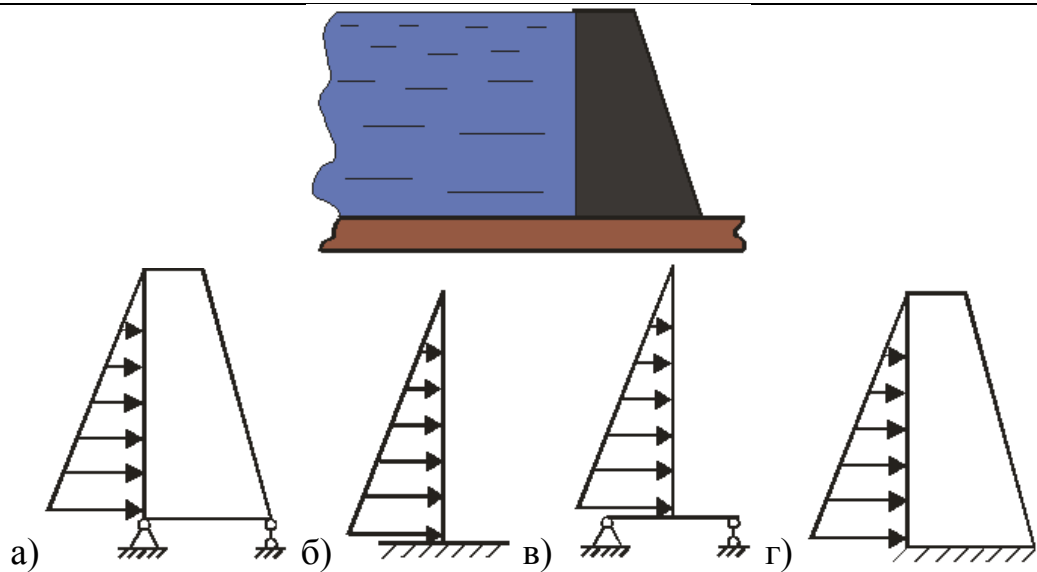
## 2.2 Перечень тестовых заданий текущего контроля

Раздел дисциплины «Введение» (пример)

Тестовое задание № 1
1. Материал конструкции, свойства которого одинаковы по всем направлениям, называется _____ материал. (Эталон: изотропный; изотропен; изотропным; изатропным)
2. Свойство тел деформироваться под нагрузкой, а потом восстанавливать свой первоначальный вид называется ... а) упругость б) устойчивость в) изотропность

г) ползучесть

3. Расчетные схемы нагружения дамбы:



4. Размерность крутящего момента ...

- а)  $кН$
- б)  $МПа$
- в)  $кН/м^2$
- г)  $кН \cdot м^2$
- д)  $кН \cdot м$

5. Соответствие нагрузок их размерности:

- |                            |                 |
|----------------------------|-----------------|
| 1) сила                    | а) $Кн$         |
| 2) момент кручения         | б) $Кн \cdot м$ |
| 3) распределенная нагрузка | в) $Кн/м$       |
|                            | г) $МПа$        |

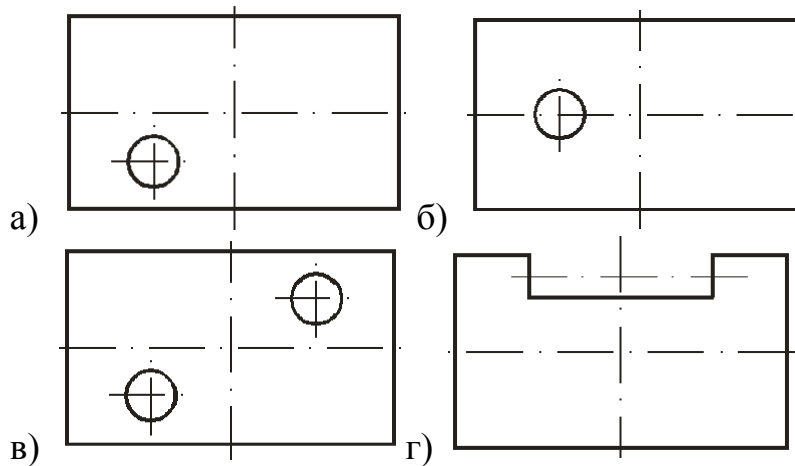
Раздел дисциплины «Центральное растяжение (сжатие) прямого стержня»  
(пример)

Тестовое задание № 1	
<p>1. Формула расчёта площади поперечного сечения <math>F</math> по условию прочности</p> <p>а) <math>F \geq [\sigma] \cdot N</math> б) <math>F \geq \frac{[\sigma]}{N}</math> в) <math>F \leq \frac{[\sigma]}{N}</math> г) <math>F \geq \frac{N}{[\sigma]}</math> д) <math>F \leq \frac{N}{[\sigma]}</math> е) <math>F \leq [\sigma] \cdot N</math></p>	
<p>2. Внутренний силовой фактор при центральном растяжении (сжатии) это ...</p> <p>а) продольная сила <math>N</math> б) поперечная сила <math>Q_x</math> в) изгибающий момент <math>M_x</math> г) изгибающий момент <math>M_y</math></p>	
<p>3. Условие прочности по допускаемым напряжениям на участке <math>BC</math> ...</p> <div style="text-align: center;"> </div> <p>а) <math>\frac{P}{3F} \leq [\sigma]</math> б) <math>\frac{P}{2F} \leq [\sigma]</math> в) <math>\frac{P}{4F} \leq [\sigma]</math> г) <math>\frac{P}{F} \leq [\sigma]</math> д) <math>\frac{P}{5F} \leq [\sigma]</math></p>	
<p>4. Продольная деформация увеличивается, если стержень ...</p> <p>а) сжимается б) не деформируется в) растягивается</p>	
<p>5. Соответствие схем нагружения эпюрам продольных сил:</p> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 45%;"> <p>1) </p> <p>2) </p> </div> <div style="width: 45%;"> <p>а) </p> <p>б) </p> <p>в) </p> </div> </div>	

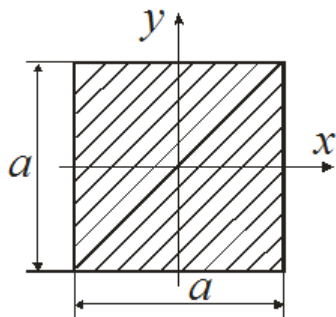
Раздел дисциплины «Геометрические характеристики плоских сечений»  
(пример)

Тестовое задание № 1

1. Сечения, в которых центробежный момент равен нулю:

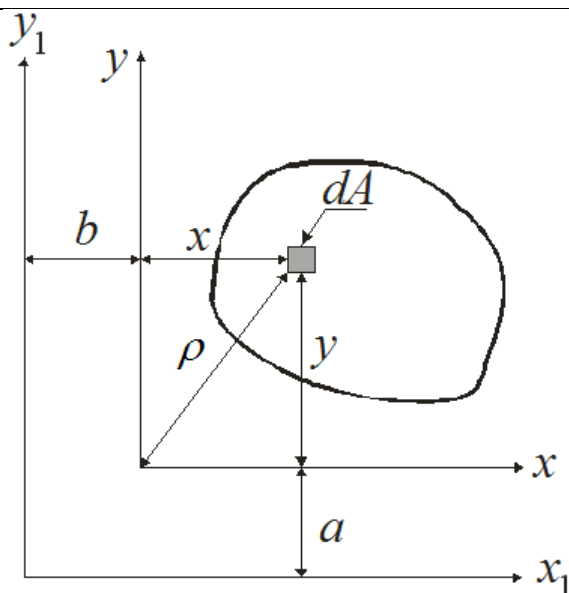


2. Статический момент...



- а)  $< 0$
- б)  $> 0$
- в)  $= 0$

3. Формула расчета момента инерции относительно оси ...



- а)  $J_{x_1} = J_x + b^2 A$
- б)  $J_{x_1} = J_x + \rho^2 A$
- в)  $J_{x_1} = J_x + abA$
- г)  $J_{x_1} = J_x + a^2 A$
- д)  $J_{x_1} = J_x + (x^2 + y^2)A$

4. Главные центральные оси инерции – оси, для которых \_\_\_\_\_ момент инерции равен нулю

5. Соответствие геометрических характеристик поперечного сечения и их размерностей:

- |                                |          |
|--------------------------------|----------|
| 1) осевой момент сопротивления | а) $M^2$ |
| 2) осевой момент инерции       | б) $M^3$ |
|                                | в) $M^4$ |

### Раздел дисциплины «Сдвиг и кручение» (пример)

#### Тестовое задание № 1

1. Силовые факторы, при которых возникает явление сдвига или среза:

- а) продольная сила
- б) поперечная сила
- в) изгибающий момент
- г) крутящий момент

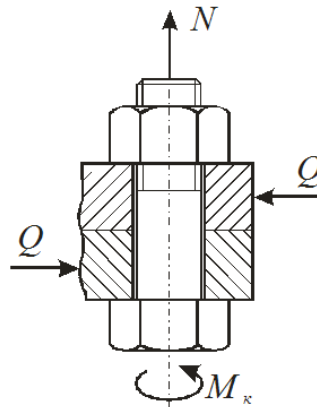
2. Формула закона Гука при сдвиге ...

- а)  $\tau = 2G\gamma$
- б)  $\tau = G\gamma$
- в)  $\tau = \frac{1}{2}G\gamma^2$
- г)  $\tau = G\gamma^2$
- д)  $\tau = 2G\gamma^2$

3. Внутренние силовые факторы и напряжения, возникающие при кручении:

- а) касательные напряжения
- б) крутящий момент
- в) нормальные напряжения
- г) продольные силы
- д) поперечные силы

4. Условие прочности при расчете болта на срез имеет вид:



- а)  $\tau_{max} = \frac{N}{F} \leq [\tau]$
- б)  $\tau_{max} = \frac{Q}{F} \leq [\tau]$
- в)  $\tau_{max} = \frac{M_k}{W_\rho} \leq [\tau]$
- г)  $\tau_{max} = \frac{M_k}{F} \leq [\tau]$

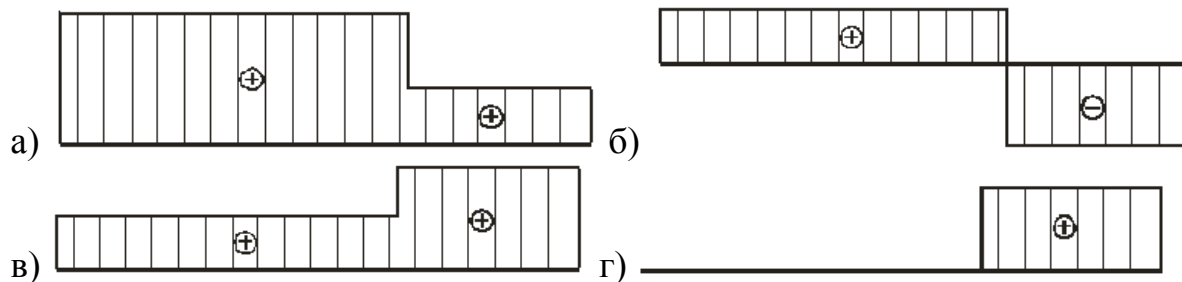
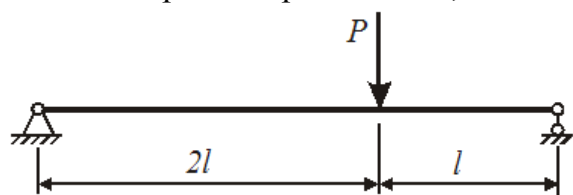
5. Условие прочности при кручении вала ...

- а)  $\tau_{max} = \frac{W_\rho}{M_{кр}} \geq [\tau]$
- б)  $\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_\rho} \geq [\tau]$
- в)  $\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_\rho} \leq [\tau]$
- г)  $\tau_{max} = W_\rho \cdot M_{кр} \geq [\tau]$
- д)  $\tau_{max} = \frac{W_\rho}{M_{кр}} \leq [\tau]$
- е)  $\tau_{max} = W_\rho \cdot M_{кр} \leq [\tau]$

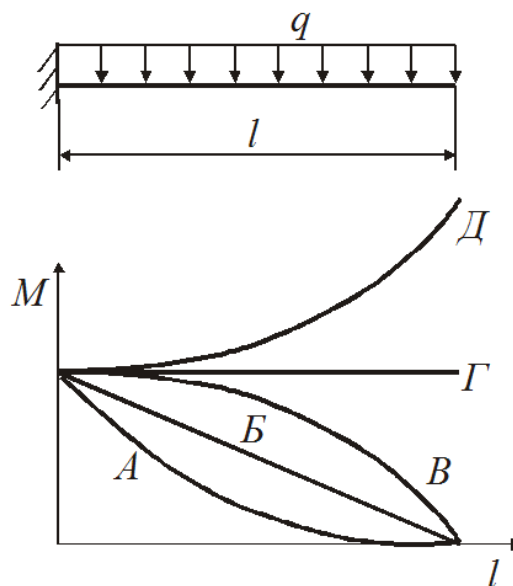
Раздел дисциплины «Плоский изгиб» (пример)

Тестовое задание № 1

1. Вид эпюры поперечных сил, соответствующий данному типу нагружения ...



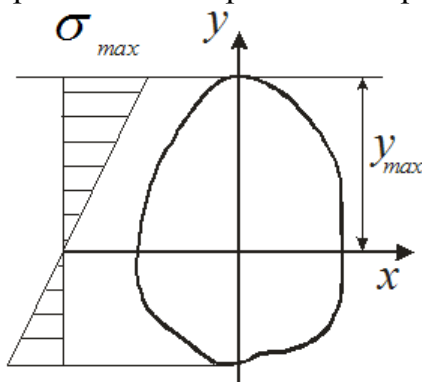
2. Линия, которая соответствует изменению изгибающего момента  $M$  по длине балки  $l$  ...



3. Эпюра изгибающих моментов  $M$  имеет экстремум на участке, если эпюра поперечных сил  $Q$  ...

- а) постоянна по длине
- б) изменяется по длине
- в) пересекается с нулевой линией
- г) имеет экстремум

4. Условия прочности по нормальным напряжениям при поперечном изгибе:



а)  $\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x} y_{max} \leq [\sigma]$

б)  $\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma]$

в)  $\sigma_{max} = \frac{M_x}{J_x} \leq [\sigma]$

г)  $\sigma_{max} = \frac{M_x}{y_{max}} J_x \leq [\sigma]$

д)  $\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x} y_{max} \leq [\sigma]$

г)  $\sigma_{max} = \frac{M_x}{y_{max}} W_x \leq [\sigma]$

5. Силовой фактор, отсутствующий в формуле для определения касательного напряжения при изгибе ...

$$\tau = \frac{? S_x^{отс}}{J_x b}$$

а)  $N$

б)  $Q_y$

в)  $M_x$

г)  $M_k$

### Методические рекомендации по проведению тестирования:

Тесты представляют собой стандартизированные задания, позволяющие автоматизировать процедуру измерения уровня знаний и умений обучающегося по теоретической части курса.

Тестовые задания используются для текущего контроля усвоения теоретического материала.

### Критерии оценивания тестирования:

Оценка	Требования
«Отлично»	Оценка «отлично» выставляется студенту, если дано пять правильных ответов на вопросы теста
«Хорошо»	Оценка «хорошо» выставляется студенту, если дано четыре правильных ответов на вопросы теста
«Удовлетворительно»	Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если дано три правильных ответов на вопросы теста
«Неудовлетворительно»	Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если дано 0 - 2 правильных ответов на вопросы теста

### 2.3 Перечень индивидуальных заданий для текущего контроля

#### ИЗ №1 «Подбор размеров сечения стержней стержневой системы»

Таблица 2.1

<p>1</p>	<p>6</p>
<p>2</p>	<p>7</p>
<p>3</p>	<p>8</p>
<p>4</p>	<p>9</p>
<p>5</p>	<p>10</p>

Таблица 2.2

Номер варианта	$a$ , мм	$b$ , мм	$F$ , кН	$q$ , кН/м	$M$ , кНм	$\alpha^\circ$
1	100	200	10	10	25	20
2	100	300	20	15	20	30
3	300	200	30	20	20	40
4	300	100	10	20	15	45
5	200	100	40	10	15	35
6	200	300	30	15	10	40
7	200	150	15	5	40	50
8	150	200	15	10	10	25
9	150	250	20	10	25	20
10	150	300	20	20	15	30

Для однородной балки  $AB$  (рис. 2.1), закреплённой с помощью шарнирно-неподвижной опоры  $A$  и жесткого стального стержня  $CD$  требуется:

- 1) подобрать размеры круглого поперечного сечения стержня  $CD$ ;
- 2) вычислить продольную деформацию стержня  $CD$ .

#### Пример выполнения ИЗ №1

**Дано:**

- 1) модуль упругости для стали принять равным  $E=2 \cdot 10^5$  МПа;
- 2) допускаемое напряжение на сжатие  $[\sigma]_{\text{сж}}=160$  МПа;
- 3) допускаемое напряжение на растяжение  $[\sigma]_{\text{раст}}=120$  МПа;
- 4)  $a = 1$  м;  $b = 2$  м;
- 5)  $F = 20$  кН;
- 6)  $\alpha = 45^\circ$ .
- 7)  $q = 10$  кН/м.

**Решение.**

1. Определяем усилие  $N$  (продольную силу) в стержне  $CD$ . Под действием внешних сил, реакций  $N$ ,  $R_A$ ,  $H_A$  балка  $AB$  находится в равновесии (рис. 2.2).

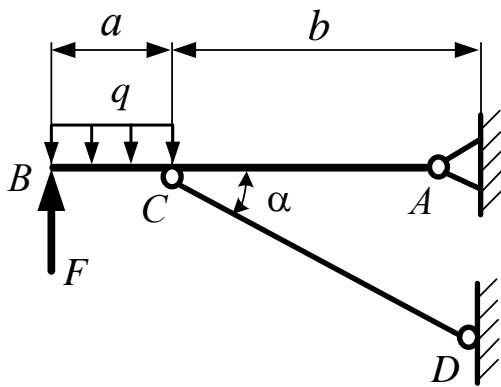


Рис. 2.1

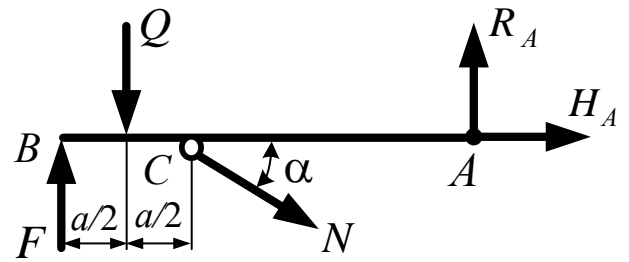


Рис. 2.2

Определим равнодействующую  $Q$  распределенной нагрузки  $q$ .

$$Q = q \cdot a = 10 \cdot 1 = 10 \text{ кН.}$$

Составляем уравнение равновесия, в которое входит только одно неизвестное усилие  $N$ .

$$\begin{aligned} \Sigma M_A(F_i) &= 0; \quad -F(a+b) + Q(0,5a+b) + N \sin \alpha \cdot b = 0; \\ N &= \frac{F(a+b) - Q(0,5a+b)}{\sin \alpha \cdot b} = \frac{20 \cdot 3 - 10 \cdot 2,5}{0,707 \cdot 2} = 24,75 \text{ кН.} \end{aligned}$$

2. Из условия прочности при осевом растяжении-сжатии вычисляем необходимую площадь поперечного сечения

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq [\sigma]_{\text{раст}}.$$

Стержень  $CD$  работает на растяжение.

$$\frac{N}{A} = [\sigma]_{\text{раст}}; \quad A = \frac{N}{[\sigma]_{\text{раст}}} = \frac{24,75 \cdot 10^3}{120} = 206,25 \text{ мм}^2.$$

3. Вычисляем диаметр круглого сечения

$$A = \frac{\pi d^2}{4}; \quad d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 206,25}{3,14}} = 16,2 \text{ мм.}$$

Следовательно, чтобы прочность стержня  $CD$  была обеспечена, диаметр стержня должен быть не менее 16,2 мм.

4. Вычисляем продольную деформацию стержня  $CD$  по формуле закона Гука  $\Delta l = \frac{Fl}{EA}$ .

Вычислим длину стержня  $CD$   $l_{CD} = b / \cos \alpha = 2 / 0,707 = 2,83$  м.

$$\Delta l = \frac{24,75 \cdot 10^3 \cdot 2,83 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 206,25} = 1,7 \text{ мм.}$$

### ***ИЗ №2 «Расчет стержня на прочность и жесткость»***

Для стального стержня (табл. 2.3) круглого поперечного сечения, находящегося под действием осевых сил  $F_1$  и  $F_2$  и распределенной нагрузки  $q$ , параметры для которого даны в табл. 2.4, требуется:

- 1) построить в масштабе эпюры продольных сил  $N$ ;
- 2) из условия прочности определить площадь опасного сечения стержня;
- 3) построить в масштабе эпюры напряжений;
- 4) построить эпюры перемещений в масштабе при заданных соотношениях площадей сечений. Собственным весом стержня пренебречь;
- 5) соотношение площадей поперечных сечений стержня  $1,5A:A:2A$ .

#### **Пример выполнения ИЗ №2**

**Дано:**

- 1) модуль упругости для стали принять равным  $E = 2 \times 10^5$  МПа;
- 2) допускаемое напряжение  $[\sigma] = 160$  МПа;
- 3)  $l_1 = 0,1$  м;  $l_2 = 0,3$  м;  $l_3 = 0,2$  м;
- 4)  $F_1 = 20$  кН;  $F_2 = 30$  кН;  $q = 10$  кН/м.

**Решение.**

**1.** Для определения продольной силы  $N$  воспользуемся методом сечений. Разбиваем стержень на участки. Началом и концом участка являются точки приложения внешних сил и опорных реакций. Для того чтобы не определять опорные реакции из уравнений равновесия, будем рассматривать отсеченные участки со свободного конца (рис. 2.3).

Согласно определению, величина продольной силы численно равна алгебраической сумме проекций всех сил, действующих на оставшуюся часть стержня, на ось стержня.

Запишем уравнения продольной силы по участкам.

Участок I,  $0 \leq z_1 \leq 0,1$  м.

$$N_1 = F_1 = 20 \text{ кН.}$$

Участок II,  $0 \leq z_2 \leq 0,3$  м.

$$N_2 = F_1 + qz_2; \quad z_2 = 0; \quad N_2 = F_1 = 20 \text{ кН;}$$

$$z_2 = 0,3 \text{ м; } N_2 = F_1 + qz_2 = 20 + 10 \cdot 0,3 = 23 \text{ кН.}$$

Таблица 2.3

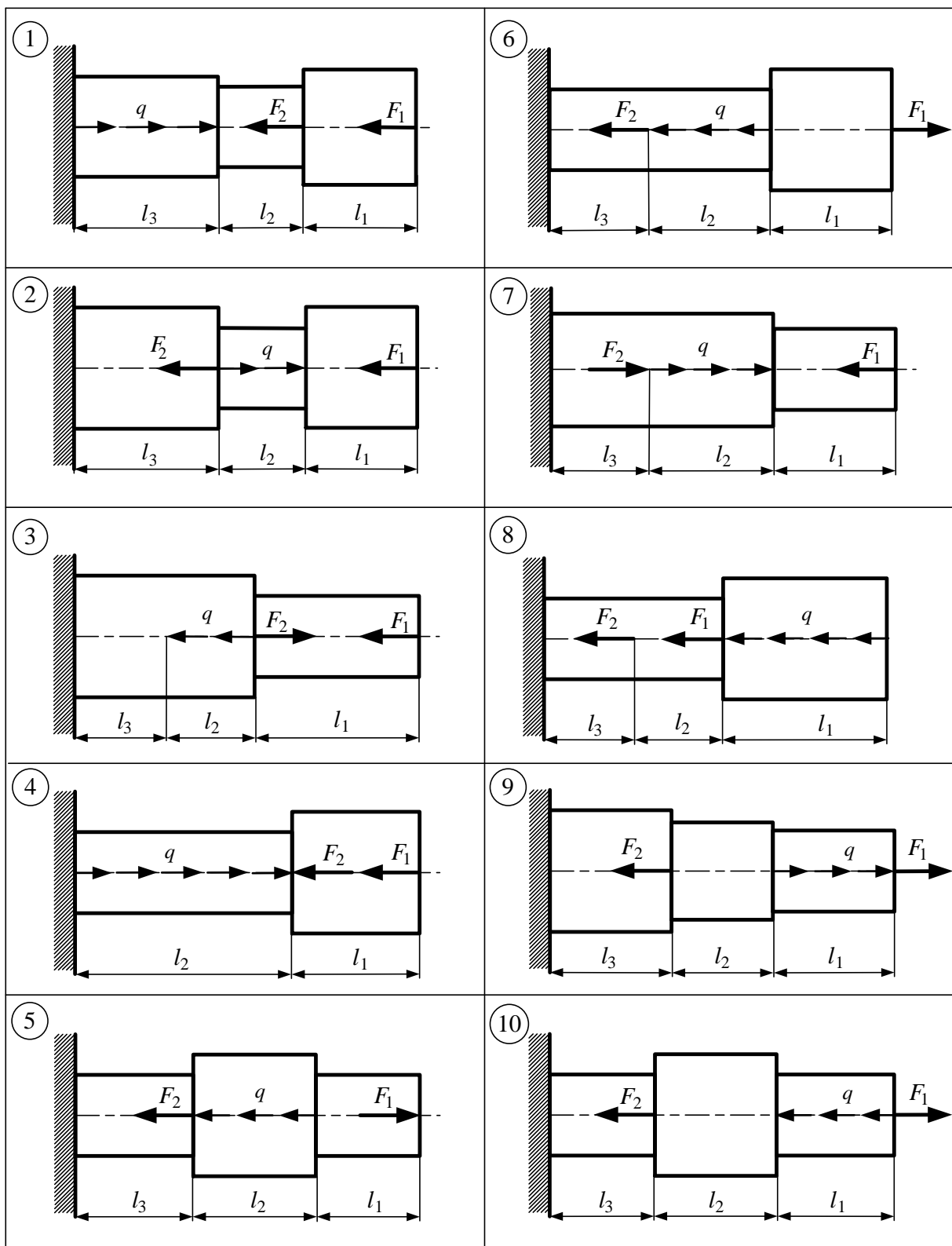


Таблица 2.4

Номер вариант	$l_1$ , мм	$l_2$ , мм	$l_3$ , мм	$F_1$ , кН	$F_2$ , кН	$q$ , кН/м	$A_1$ , мм <sup>2</sup>	$A_2$ , мм <sup>2</sup>	$\Delta t$ , °С	$\Delta$ , мм
1	100	200	300	10	20	10	400	600	100	0,01
2	100	300	200	20	10	15	600	400	90	0,02
3	300	200	100	30	15	20	600	800	80	0,03
4	300	100	200	10	40	20	500	800	110	0,04
5	200	100	300	40	25	10	400	800	120	0,05
6	200	300	100	30	25	15	600	400	130	0,06
7	200	150	100	15	20	5	600	800	140	0,07
8	150	200	250	15	35	10	800	1000	150	0,08
9	150	250	200	20	30	10	800	400	100	0,09
10	150	300	100	20	40	20	400	500	90	0,1

Третий участок,  $0 \leq z_2 \leq 0,2$  м.

$$N_3 = F_1 + ql_2 - F_2 = 20 + 10 \cdot 0,3 - 30 = -7 \text{ кН.}$$

По полученным данным строим эпюру  $N$  (рис.2.4, а), предварительно выбрав масштабный коэффициент.

## 2. Подбор размеров поперечного сечения.

Из условия прочности определим площади и размеры поперечных сечений стержня.

$$\sigma_{\max} = \frac{N_2}{A_2} = [\sigma]; A_2 = A = \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{23 \cdot 10^3}{160} = 143,75 \text{ мм}^2.$$

Площадь и диаметр круглого поперечного сечения определяются по формуле

$$A_2 = \frac{\pi d_2^2}{4},$$

отсюда

$$d_2 = \sqrt{\frac{4A_2}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 143,75}{3,14}} = 13,5 \text{ мм.}$$

Площадь поперечного сечения первого участка:

$$A_1 = 1,5A_2 = 1,5 \cdot 143,75 = 215,6 \text{ мм}^2;$$

$$d_1 = \sqrt{\frac{4A_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 215,6}{3,14}} = 16,6 \text{ мм.}$$

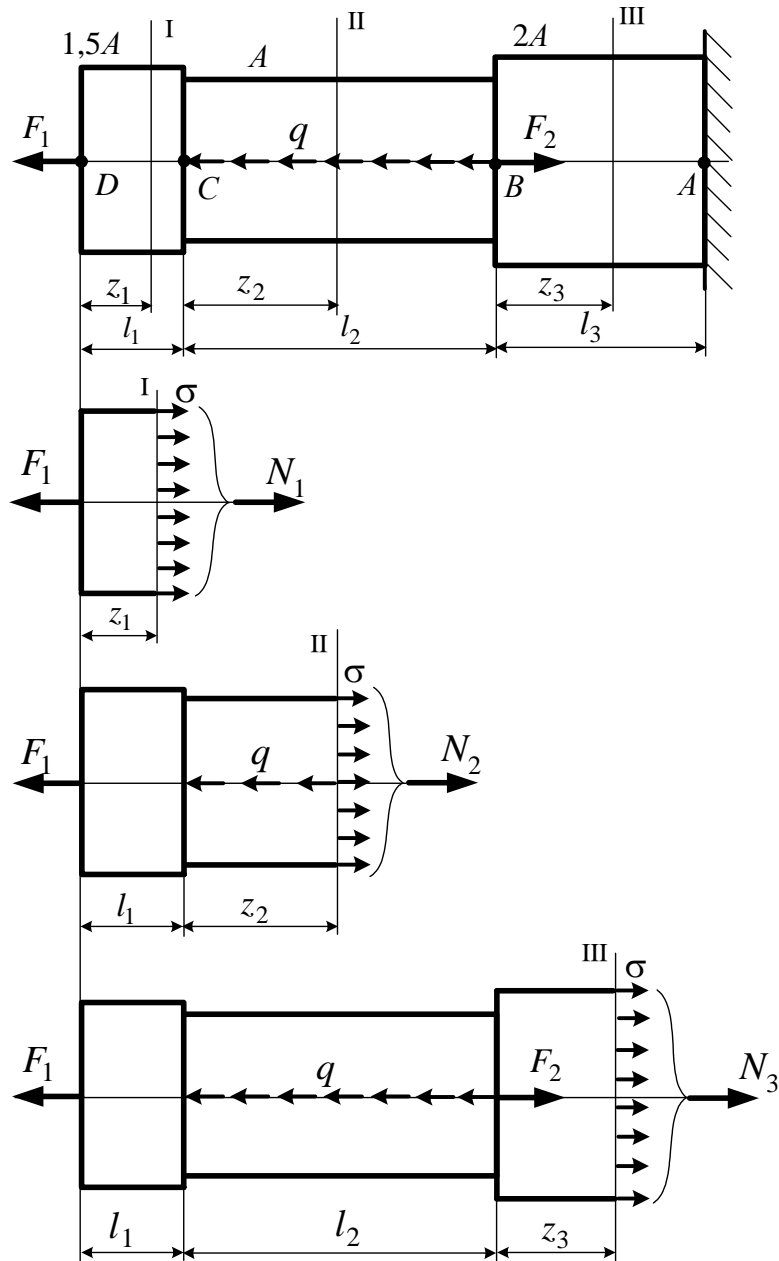


Рис. 2.3

Площадь и диаметр поперечного сечения третьего участка:

$$A_3 = 2A_2 = 2 \cdot 143,75 = 287,5 \text{ мм}^2;$$

$$d_3 = \sqrt{\frac{4A_3}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 287,5}{3,14}} = 19,14 \text{ мм.}$$

### 3. Построение эпюры нормальных напряжений.

Участок  $CD$ :

$$\sigma_{CD} = \frac{N_1}{A_1} = \frac{20 \cdot 10^3}{215,6} = 92,8 \text{ МПа.}$$

Участок  $BC$ :

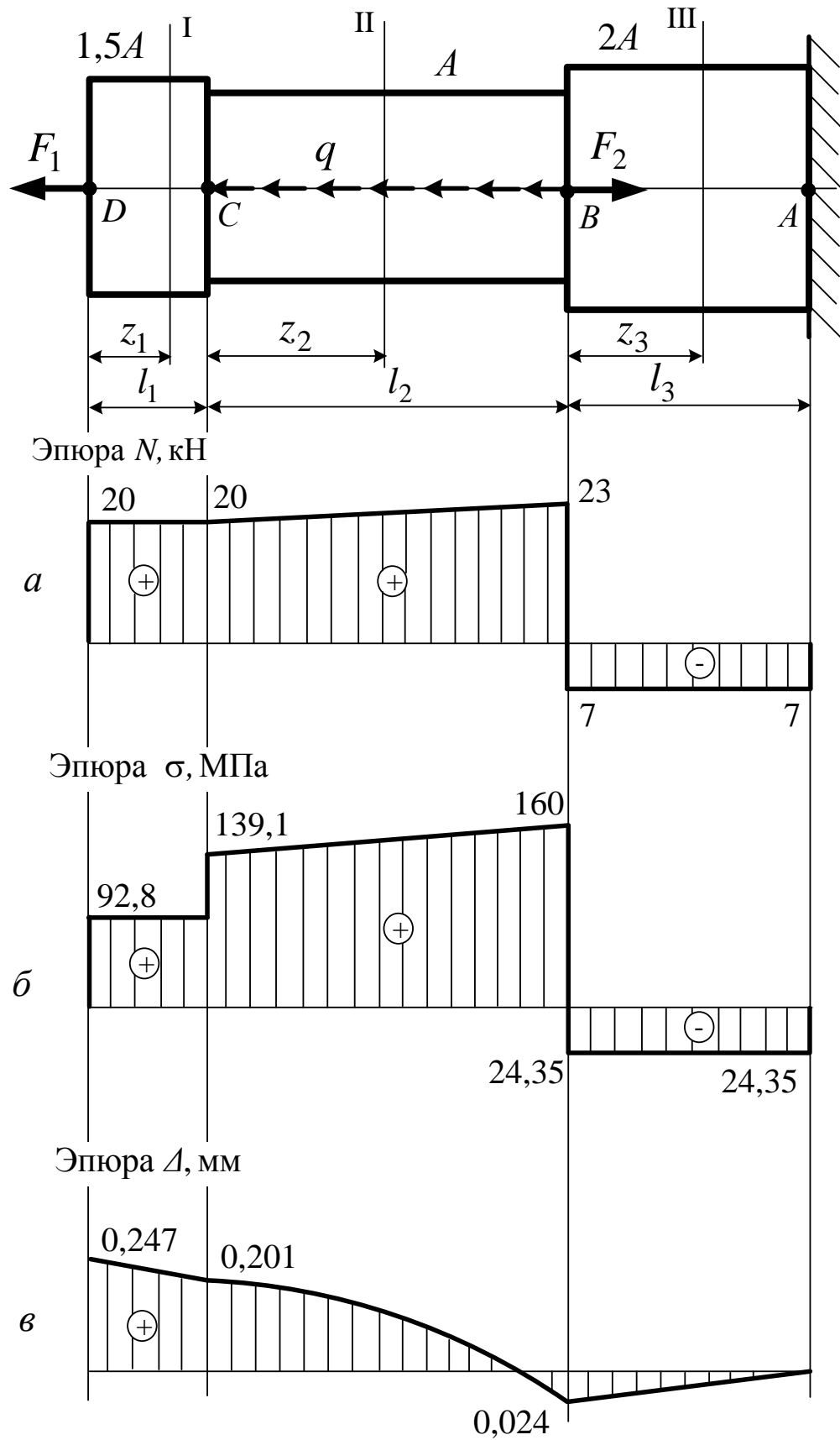


Рис. 2.4

$$\sigma_{BC_{z_2=0}} = \frac{N_{2,z_2=0}}{A_2} = \frac{20 \cdot 10^3}{143,75} = 139 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_{BC_{z_2=l}} = \frac{N_{2,z_2=l}}{A_2} = \frac{23 \cdot 10^3}{143,75} = 160 \text{ МПа.}$$

Участок  $AB$ :

$$\sigma_{AB} = \frac{N_3}{A_3} = \frac{-7 \cdot 10^3}{287,5} = -24,3 \text{ МПа.}$$

Строим эпюру нормальных напряжений  $\sigma$  в требуемом масштабе (рис. 2.4, б).

4. Построение эпюры перемещений. Для построения эпюры перемещений используем формулу закона Гука  $\Delta l = \frac{Fl}{EA}$ .

При построении эпюры  $\Delta l$  учтём, что в точке  $A$  (жесткая заделка) перемещение сечения стержня отсутствует. С этой точки и начинаем отсчитывать ординаты перемещений.

$$\Delta_A = 0;$$

$$\Delta_B = \Delta_A + \Delta l_{AB} = 0 + \frac{N_3 l_3}{EA_3} = \frac{(-7 \cdot 10^3) \cdot 200}{2 \cdot 10^5 \cdot 287,5} = -0,024 \text{ мм;}$$

$$\Delta_C = \Delta_B + \Delta l_{BC} = \Delta_B + \int_0^{l_2} \frac{N_2 dz_2}{EA_2} = \Delta_B + \int_0^{l_2} \frac{(F_1 + qz_2)}{EA_2} dz_2 =$$

$$= -0,024 + \int_0^{l_2} \frac{F_1}{EA_2} dz_2 + \int_0^{l_2} \frac{qz_2}{EA_2} dz_2 = -0,024 + \left( \frac{F_1 z_2}{EA_2} + \frac{qz_2^2}{2EA_2} \right) \Big|_0^{l_2} =$$

$$= -0,024 + \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 300}{2 \cdot 10^5 \cdot 143,75} + \frac{10 \cdot 300^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 143,75} = 0,201 \text{ мм;}$$

$$\Delta_D = \Delta_C + \Delta l_{CD} = 0,201 + \frac{N_1 l_1}{EA_1} = 0,201 + \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 100}{2 \cdot 10^5 \cdot 215,6} = 0,247 \text{ мм.}$$

Строим эпюру перемещений в масштабе (рис. 2.2, в).

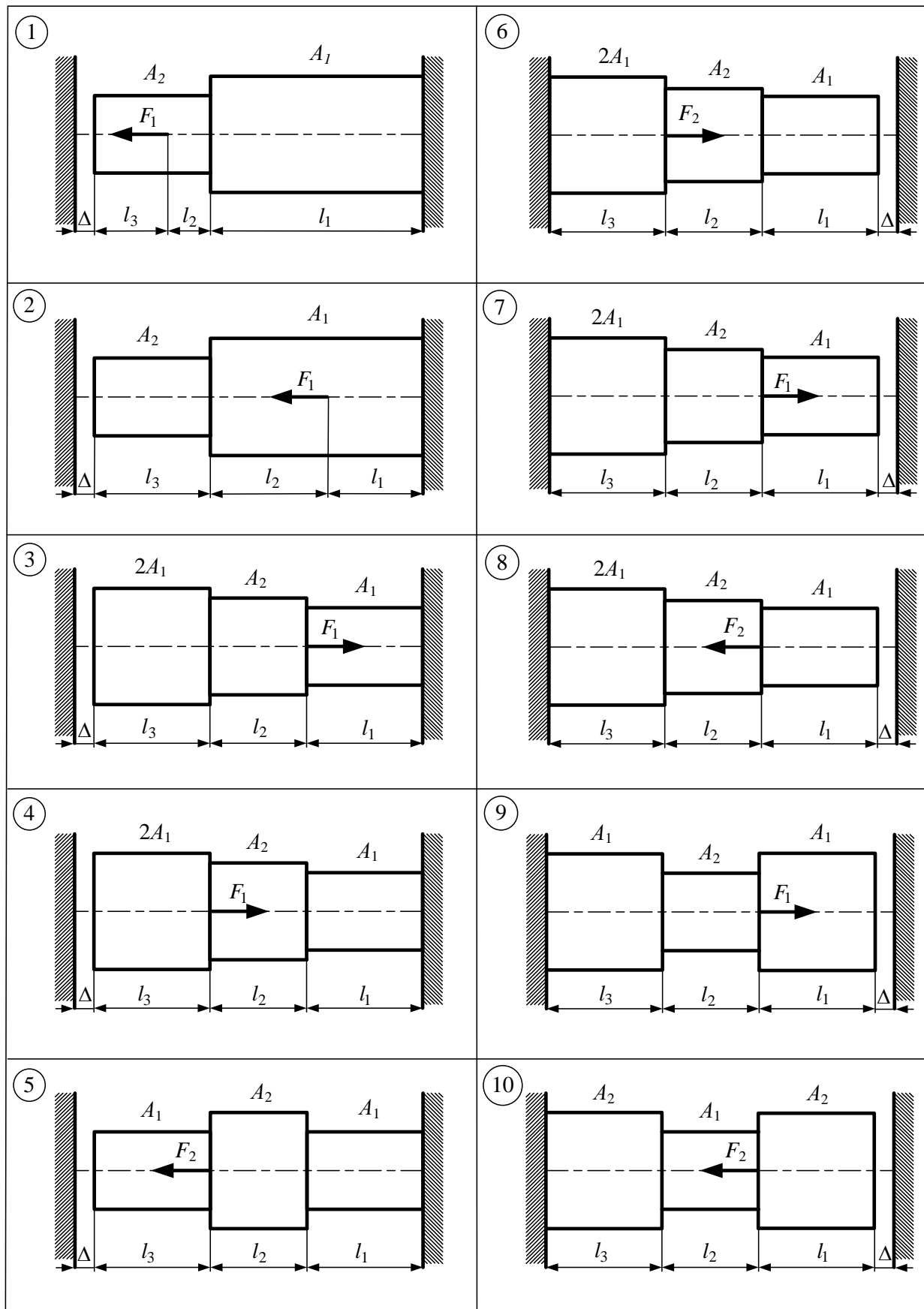
Проверяем стержень по условию жесткости:

$$\Delta_D \leq [\Delta],$$

где  $[\Delta] = 0,01$  мм, принимается конструктивно.

$$\Delta_D = 0,142 \text{ мм} > [\Delta] = 0,01 \text{ мм.}$$

Вывод: условие жесткости не выполняется.



Для стального стержня круглого поперечного сечения (рис. 2.5, а), находящегося под действием осевой силы  $F$  и нагретого до температуры  $\Delta t$ , требуется:

- 1) построить в масштабе эпюру продольных сил  $N$ ;
- 2) построить в масштабе эпюру напряжений  $\sigma$ ;
- 3) проверить стержень по условию прочности.

Таблица 2.6

Номер вариант	$l_1$ , мм	$l_2$ , мм	$l_3$ , мм	$F_1$ , кН	$F_2$ , кН	$A_1$ , мм <sup>2</sup>	$A_2$ , мм <sup>2</sup>	$\Delta t$ , °С	$\Delta$ , Мм
1	90	250	300	15	22	440	650	105	0,01
2	80	320	200	25	12	600	400	90	0,02
3	100	50	100	35	15	620	850	80	0,03
4	330	80	200	12	40	500	840	110	0,04
5	240	100	300	40	25	400	850	120	0,05
6	250	90	100	38	26	600	400	130	0,06
7	200	150	100	15	20	605	800	140	0,07
8	150	205	250	16	35	800	1050	150	0,08
9	155	250	200	20	30	805	450	100	0,09
10	150	310	100	20	40	400	500	90	0,1

### Пример выполнения ИЗ №3

**Дано:**

- 1) допускаемое напряжение  $[\sigma] = 160$  МПа;
- 2) модуль упругости стали  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа;
- 3) коэффициент температурного расширения  $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$ ;
- 4)  $F = 80$  кН;  $l_1 = 100$  мм;  $l_2 = 100$  мм;  $l_3 = 200$  мм;
- 5)  $A_1 = 400$  мм<sup>2</sup>;  $A_2 = 600$  мм<sup>2</sup>;  $\Delta t = 100$  °С;  $\Delta = 0,1$  мм.

**Решение.**

1. Определим перемещение сечения «а–а» для того, чтобы убедиться, закроется ли зазор  $\Delta$ :

$$\Delta_{a-a} = \Delta l_F + \Delta l_t,$$

где  $\Delta l_F = \frac{Fl_1}{EA_1}$  – удлинение стержня от действия осевой силы  $F$ ;

$\Delta l_t = \alpha \Delta t (l_1 + l_2 + l_3)$  – удлинение от температурного расширения.

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_{a-a} &= \frac{Fl_1}{EA_1} + \alpha \Delta t (l_1 + l_2 + l_3) = \\ &= \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 100}{2 \cdot 10^5 \cdot 400} + 125 \cdot 10^{-7} \cdot 100 \cdot 400 = 0,6 \text{ мм} > \Delta = 0,1 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Зазор закрывается, и в точке  $D$  возникает опорная реакция  $R_D$ .

Определим степень статической неопределимости системы по формуле

$$C = S - n = 2 - 1 = 1,$$

где  $S$  – число неизвестных усилий;  $n$  – число всех возможных уравнений статики.

Система один раз статически неопределима, поэтому кроме уравнения равновесия составляют дополнительное уравнение совместности деформаций

$$\Delta_{a-a} = \Delta l_F + \Delta l_t + \Delta l_{R_D} = \Delta;$$

$$\frac{Fl_1}{EA_1} + \alpha \Delta t (l_1 + l_2 + l_3) - \frac{R_D (l_1 + l_2)}{EA_2} - \frac{R_D l_3}{EA_2} = \Delta;$$

$$-\frac{R_D (l_1 + l_2)}{EA_1} - \frac{R_D l_3}{EA_2} = \Delta - \left( \frac{Fl_1}{EA_1} + \alpha \Delta t (l_1 + l_2 + l_3) \right);$$

$$-\frac{200R_D}{2 \cdot 10^5 \cdot 400} - \frac{200R_D}{2 \cdot 10^5 \cdot 600} = 0,1 - 0,6;$$

$$-\frac{200R_D}{2 \cdot 10^5 \cdot 400} - \frac{200R_D}{2 \cdot 10^5 \cdot 600} = -0,5;$$

$$R_D = 120 \text{ кН}.$$

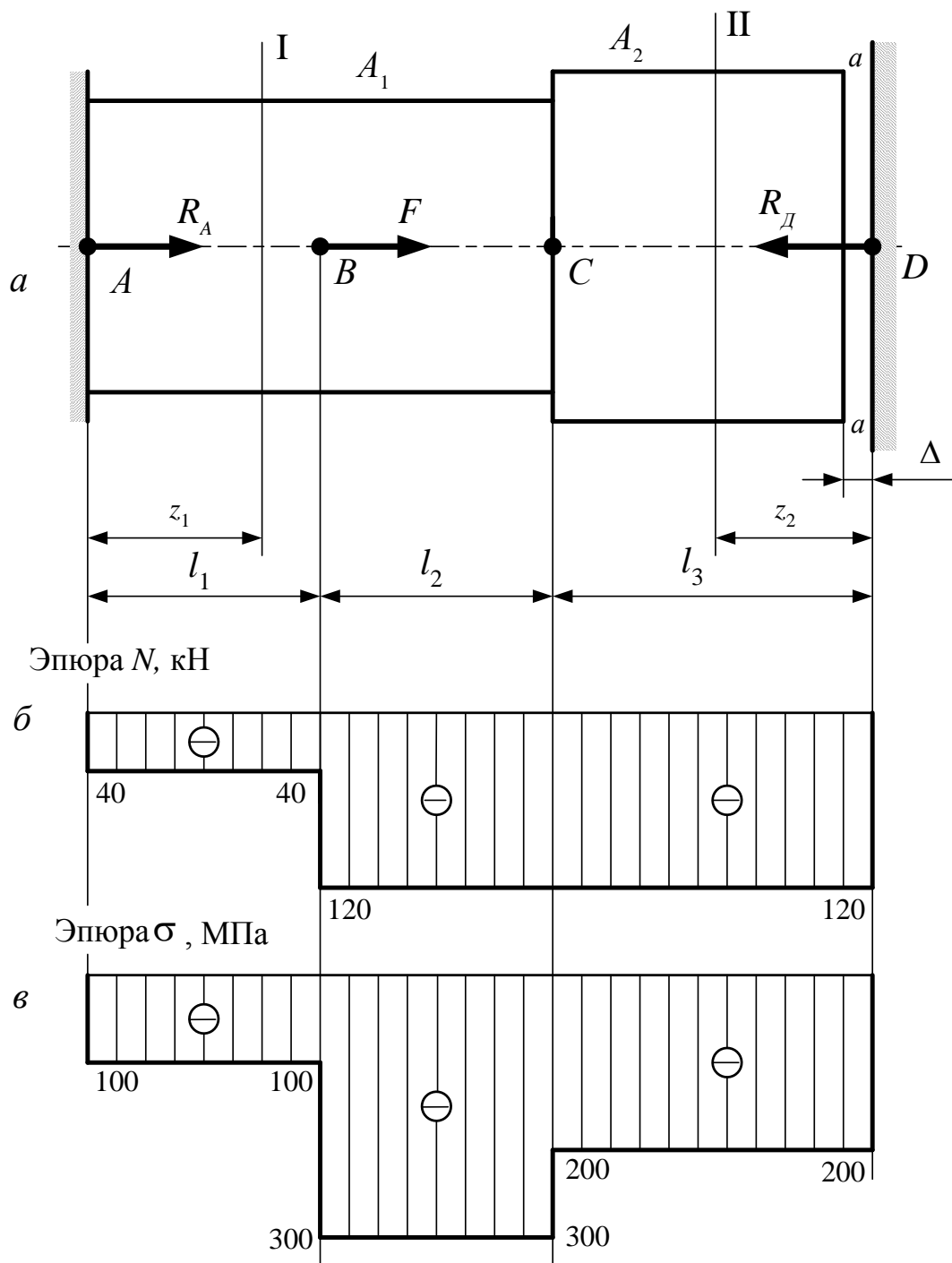


Рис. 2.5

Из уравнения равновесия  $\sum F_z = R_A + F - R_D = 0$  находим

$$R_A = R_D - F = 120 - 80 = 40 \text{ кН.}$$

Определим продольную силу  $N$ .

Участок I,  $0 \leq z_1 \leq l_1$

$$N_1 = -R_A = -40 \text{ кН.}$$

Участок II,  $0 \leq z_2 \leq (l_2 + l_3)$

$$N_2 = -R_D = -120 \text{ кН.}$$

Строим эпюру продольной силы  $N$  в выбранном масштабе (рис. 2.5, б).

2. Определим нормальные напряжения  $\sigma$ .

Участок  $AB$ :

$$\sigma_{AB} = \frac{N_1}{A_1} = \frac{-40 \cdot 10^3}{400} = -100 \text{ МПа} .$$

Участок  $BC$ :

$$\sigma_{BC} = \frac{N_2}{A_1} = \frac{-120 \cdot 10^3}{400} = -300 \text{ МПа} .$$

Участок  $CD$ :

$$\sigma_{CD} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-120 \cdot 10^3}{600} = -200 \text{ МПа} .$$

Строим эпюру нормальных напряжений  $\sigma$  в масштабе (рис. 2.5, в).

3. Проверим стержень по условию прочности  $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$ . Опасным является участок  $BC$ , так как

$$\sigma_{\max} = |-300| \text{ МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа} .$$

Следовательно, условие прочности не выполняется и необходимо увеличить площадь поперечного сечения стержня.

Вычислим площадь поперечного сечения на участке  $CD$  из условия прочности

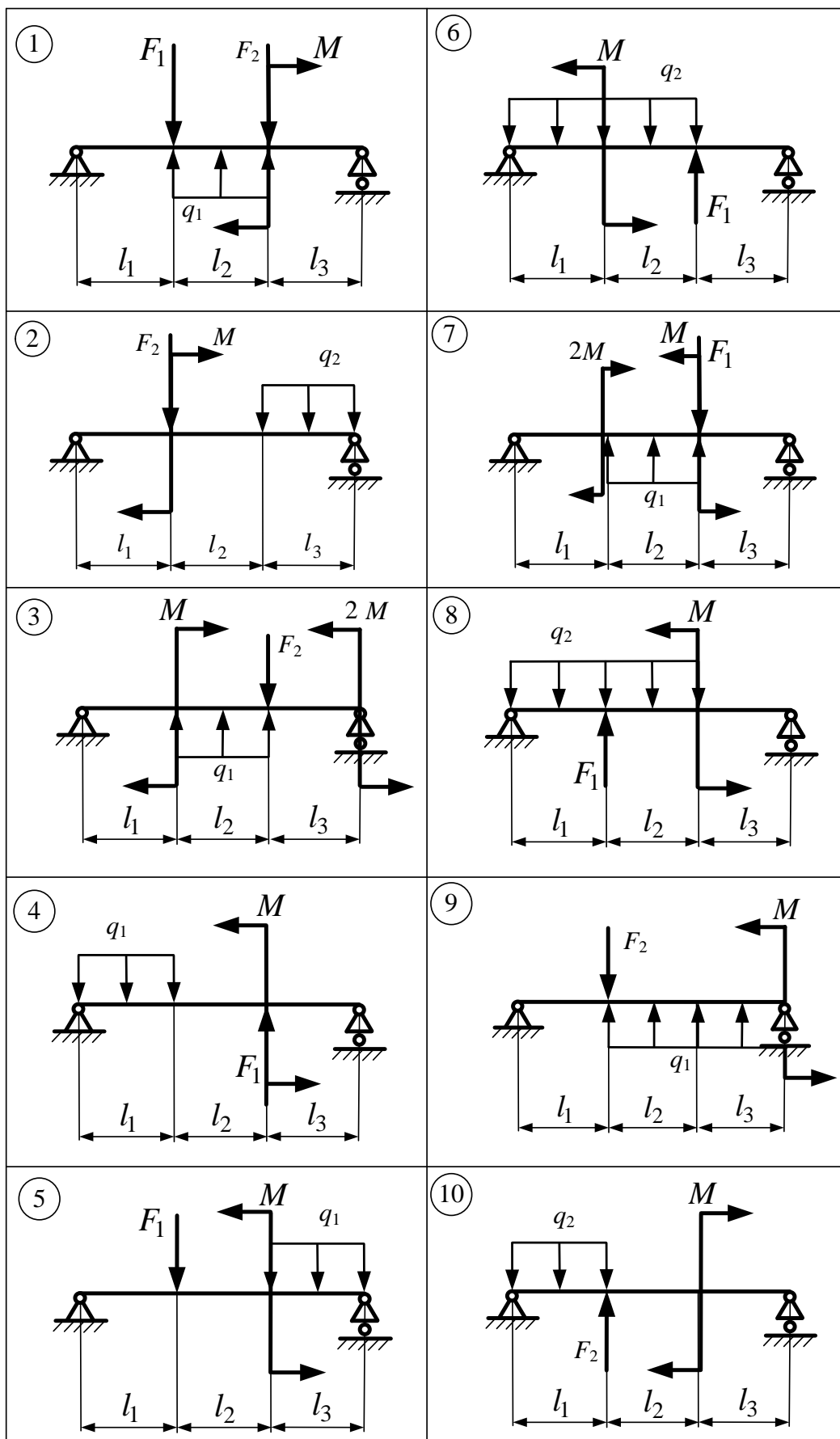
$$\sigma_{\max} = \frac{N_2}{A_1} = \frac{-120 \cdot 10^3}{A_1} = [\sigma] = 160 \text{ МПа} ,$$

$$A_1 = \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{|120 \cdot 10^3|}{160} = 750 \text{ мм}^2 .$$

#### ***ИЗ №4 «Расчет на прочность и жесткость двухопорной балки»***

Для балки, работающей на изгиб (рис. 2.6), требуется:

- 1) определить опорные реакции;
- 2) построить эпюры внутренних силовых факторов: изгибающих моментов  $M$  и поперечных сил  $Q$ ;
- 3) подобрать сечения балки из условия прочности по нормальным напряжениям: а) двутавровое; б) прямоугольное; в) круглое; г) кольцевое;
- 4) вычислить нормальные напряжения в характерных точках двутаврового сечения;
- 5) вычислить касательные напряжения в характерных точках двутаврового сечения;
- 6) проверить балку на прочность по касательным напряжениям;
- 7) вычислить углы поворота  $\theta$  и прогибы  $y$  в характерных точках балки;
- 8) построить примерное положение упругой линии балки;
- 9) проверить балку по условию жесткости.



Номер варианта	$F_1$ , кН	$F_2$ , кН	$M$ , кНм	$q_1$ , кН/м	$q_2$ , кН/м	$l_1$ , м	$l_2$ , м	$l_3$ , м
1	30	62	8	10	20	1	1,5	1
2	25	58	20	15	10	2	1	0,5
3	22	56	30	10	15	1	1	1,5
4	25	54	55	15	15	2	1,5	1
5	33	52	50	10	10	1,5	1	0,5
6	35	42	45	20	10	0,6	1	1
7	44	46	15	15	10	0,8	1	1,2
8	45	48	25	14	10	1	1,5	1
9	52	38	33	16	20	1	2	1
10	55	36	35	18	5	2	1	1,5

**Пример выполнения ИЗ № 4**

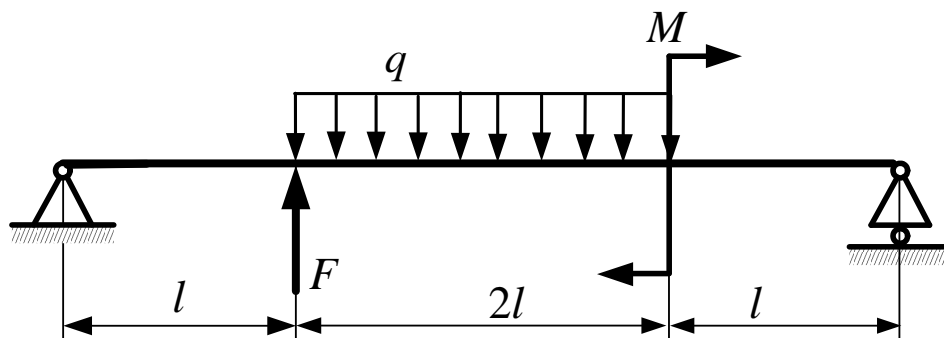


Рис. 2.6

**Дано:**

- 1) допускаемые напряжения  $[\sigma] = 160$  МПа;  $[\tau] = 80$  МПа;
- 2)  $F = 50$  кН;  $q = 10$  кН/м;  $M = 40$  кНм;  $l = 1$  м.

**Решение:**

1. Определим опорные реакции, используя вторую форму условий равновесия для плоской системы произвольно расположенных сил (рис. 2.7, а):

$$\Sigma F_z = 0; H_A = 0;$$

$$\Sigma m_A = 0; Fl - q \cdot 2l \cdot \left(\frac{2l}{2} + l\right) - M + R_B(2l + 2l) = 0;$$

$$R_B = \frac{-Fl + q \cdot 2l \cdot \left(\frac{2l}{2} + l\right) + M}{(2l + 2l)} = \frac{-50 \cdot 1 + 10 \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{2} + 1\right) + 40}{4} = 7,5 \text{ кН};$$

$$\Sigma m_B = 0; -F(2l + l) + q \cdot 2l \cdot \left(\frac{2l}{2} + l\right) - M - R_A(2l + 2l) = 0;$$

$$R_A = \frac{-F(2l + l) + q \cdot 2l \cdot \left(\frac{2l}{2} + l\right) - M}{(2l + 2l)} = \frac{-50 \cdot 3 + 10 \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{2} + 1\right) - 40}{4} = -37,5 \text{ кН};$$

Для проверки правильности определения опорных реакций составим уравнение равновесия

$$\Sigma F_y = 0.$$

$$\Sigma F_y = 0; R_A + F - q \cdot 2l + R_B = -37,5 + 50 - 10 \cdot 2 + 7,5 = 0.$$

Сумма проекций всех сил системы на поперечную ось равна нулю, следовательно, опорные реакции определены правильно.

2. Для определения поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$  воспользуемся методом сечений (рис. 2.7).

Участок I,  $0 \leq z_1 \leq l = 1$  м:

$$Q = R_A = -37,5 \text{ кН}; M = R_A z_1; M_{z_1=0} = 0; M_{z_1=1} = R_A \cdot 1 = -37,5 \text{ кНм};$$

Участок II,  $0 \leq z_2 \leq 2l = 2$  м:

$$Q = R_A + F - q z_2; Q_{z_2=0} = R_A + F = -37,5 + 50 = 12,5 \text{ кН};$$

$$Q_{z_2=2} = R_A + F - q \cdot 2 = -37,5 + 50 - 10 \cdot 2 = -7,5 \text{ кН};$$

$$M = R_A(l + z_2) + F z_2 - q \frac{z_2^2}{2}; M_{z_2=0} = R_A l = -37,5 \cdot 1 = -37,5 \text{ кНм};$$

$$M_{z_2=2} = R_A(l + 2) + F \cdot 2 - q \frac{2^2}{2} = -37,5(1 + 2) + 50 \cdot 2 - 10 \cdot 2 = -32,5 \text{ кНм}.$$

Если поперечная сила на участке меняет свой знак с плюса на минус, то в сечении где  $Q = 0$ ,  $M = M_{\max}$ .

$$Q = R_A + F - qz_2 = 0; \Rightarrow z_2 = \frac{R_A + F}{q} = \frac{-37,5 + 50}{10} = 1,25 \text{ м.}$$

Подставим полученное значение  $z_2$  в уравнение изгибающего момента на втором участке:

$$\begin{aligned} M_{\max_{z_2=1,25}} &= R_A(l+1,25) + F \cdot 1,25 - q \frac{1,25^2}{2} = \\ &= -37,5(1+1,25) + 50 \cdot 1,25 - 10 \cdot 1,25 = -29,675 \text{ кНм.} \end{aligned}$$

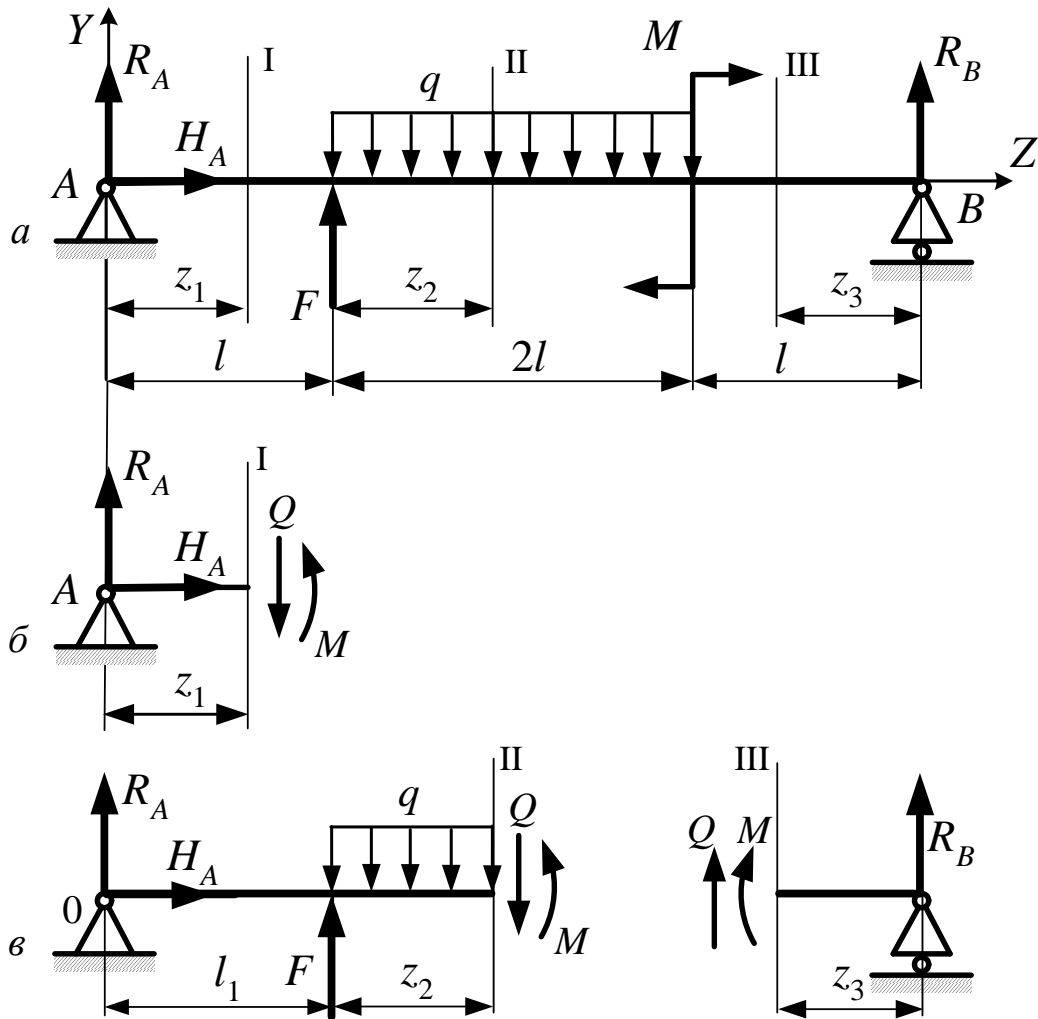


Рис. 2.7

Участок III,  $0 \leq z_3 \leq l = 1$  м:

$$Q = -R_B = -7,5 \text{ кН};$$

$$M = R_B z_3; M_{z_3=0} = 0; M_{z_3=1} = R_B \cdot 1 = 7,5 \cdot 1 = 7,5 \text{ кНм};$$

Построим эпюры поперечной силы  $Q$  (рис. 2.8, а) и изгибающего момента  $M$  (рис. 2.8, б).

3. Подберем размеры поперечного сечения балки различных профилей.

Используя условие прочности при изгибе, определим величину момента сопротивления сечения  $W_x$ :

$$W_x = \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]}; \quad M_{\max} = |-37,5| \text{ кНм}; \quad W_x = \frac{37,5 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,234 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 234 \text{ см}^3.$$

*Двутавровое поперечное сечение.* Из таблиц сортамента прокатной стали (ГОСТ 8239-89) определяем номер двутавра – № 22;  $W_x = 232 \text{ см}^3$ ;  $I_x = 2550 \text{ см}^4$ ; площадь поперечного сечения  $A = 30,6 \text{ см}^2$ .

Так как момент сопротивления принятого двутавра меньше, чем расчетный, то необходимо определить перенапряжение, которое не должно превышать 5 %.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{37,5}{232 \cdot 10^{-6}} = 162 \text{ МПа}; \quad \frac{162-160}{160} \cdot 100\% = 1,25\% < 5\%, \text{ что допустимо.}$$

*Кольцевое поперечное сечение:*

$$W_x = \frac{\pi d_H^3}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0,1 d_H^3 (1 - \alpha^4), \quad (5.28)$$

где  $d_H$  – наружный диаметр,  $d_B$  – внутренний диаметр,  $\alpha = \frac{d_B}{d_H} = 0,8$ .

$$W_x \approx 0,1 d_H^3 (1 - \alpha^4) = 234 \text{ см}^3;$$

$$d_H = \sqrt[3]{\frac{W_x}{0,1(1 - \alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{234}{0,1(1 - 0,8^4)}} = 15,8 \text{ см, принимаем } d_H = 16 \text{ см.}$$

$$d_B = d_H \cdot 0,8 = 16 \cdot 0,8 = 12,8 \text{ см.}$$

$$A = \frac{\pi}{4} (d_H^2 - d_B^2). \quad (5.29)$$

$$A = \frac{\pi}{4} (16^2 - 12,8^2) = 72,4 \text{ см}^2.$$

*Прямоугольное поперечное сечение,  $h = 2b$ :*

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{2b^3}{3}; \quad 234 = \frac{2b^3}{3};$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 234}{2}} = 7,05 \text{ см, принимаем } b = 7 \text{ мм}; \quad h = 2b = 2 \cdot 7 = 14 \text{ см};$$

$$A = bh = 7 \cdot 14 = 98 \text{ см}^2.$$

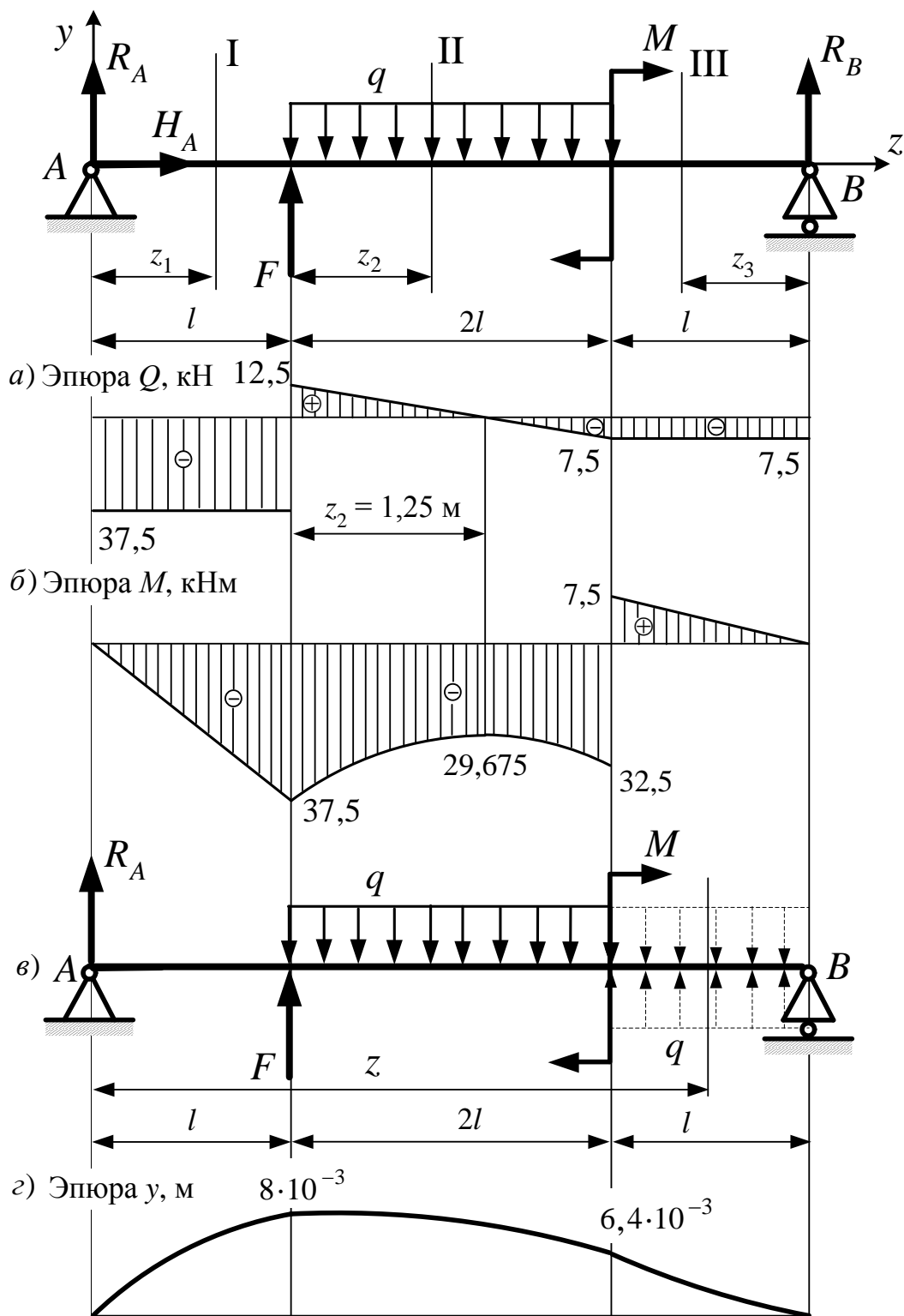


Рис. 2.8

Круглое поперечное сечение:

$$W_x = 0,1 d^3; 234 = 0,1 d^3; d = \sqrt[3]{\frac{W_x}{0,1}} = \sqrt[3]{\frac{234}{0,1}} = 13,28 \text{ см, принимаем } d = 14 \text{ см.}$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 14^2}{4} = 154 \text{ см}^2.$$

Наиболее рациональным является двутавровое сечение, так как при равной прочности имеет меньшую площадь поперечного сечения.

Если площадь двутаврового поперечного сечения принять за единицу, то соотношения между площадями всех поперечных сечений будут следующими:  $A^I : A^{II} : A^{III} : A^{IV} = 1 : 2,37 : 3,2 : 5,03$ .

#### 4. Нормальные напряжения $\sigma$ вычислим по формуле Навье (5.2)

В опасном сечении  $M_{\max} = |-37,5| \text{ кНм}$ ,  $Q = -37,5 \text{ кН}$ .

Данные для двутавра № 22:  $h = 220 \text{ мм}$ ;  $b = 110 \text{ мм}$ ;  $s = 5,4 \text{ мм}$ ;  $t = 8,7 \text{ мм}$ ;  $W_x = 232 \text{ см}^3$ ;  $I_x = 2550 \text{ см}^4$ ;  $S_x = 131 \text{ см}^3$ ;  $A = 30,6 \text{ см}^2$ ;

Обозначим характерные точки по высоте сечения (рис. 2.9).

Точка 1:

$$y_1 = \frac{h}{2} = \frac{220}{2} = 110 \text{ мм} = 0,11 \text{ м};$$

$$\sigma^{(1)} = \frac{M_{\max} y_1}{I_x} = \frac{37,5 \cdot 0,11}{2550 \cdot 10^{-8}} = 161,8 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2 = 161,8 \text{ МПа.}$$

Так как изгибающий момент отрицательный, то точки 1 и 2 лежат в растянутой зоне и напряжение в этих точках имеет положительный знак.

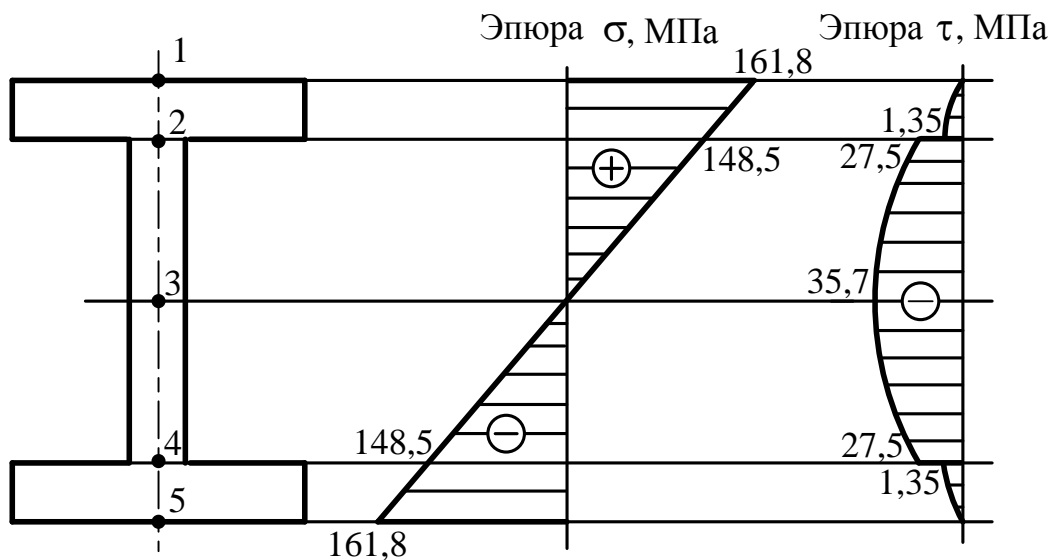


Рис. 2.9

Точка 2:

$$y_2 = \frac{h}{2} - t = \frac{220}{2} - 8,7 = 101,3 \text{ мм} = 0,101 \text{ м};$$

$$\sigma^{(2)} = \frac{M_{\max} y_2}{I_x} = \frac{37,5 \cdot 0,101}{2550 \cdot 10^{-8}} = 148,5 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2 = 148,5 \text{ МПа} .$$

**Точка 3**

$\sigma^{(3)} = 0$ , так как  $y_3 = 0$ . Ось, проходящая через точку 3, называется *нейтральной линией*.

**Точки 4 и 5.** В этих точках значения нормальных напряжений те же, что и в точках 2 и 1, только отрицательные, так как точки 4 и 5 лежат в сжатой зоне.

$$\sigma^{(4)} = -148,5 \text{ МПа}; \quad \sigma^{(5)} = -161,8 \text{ МПа} .$$

5. Касательные напряжения  $\tau$  вычислим по формуле (4.8)

В точках 1 и 5 касательные напряжения  $\tau = 0$ .

В точках 2 и 4 касательные напряжения  $\tau$  изменяются скачкообразно, за счет изменения ширины волокна, проходящего через точку 2. График в этих точках носит несколько условный характер, так как резкое изменение ширины сечения вызывает местное распределение напряжений. Знак касательных напряжений тот же, что и поперечной силы  $Q$ .

Точки 2, 4. Вычислим статический момент площади поперечного сечения по формуле (5.15)

$$S_x^* = bt \left( \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = 0,11 \cdot 0,0087 \left( \frac{0,22}{2} - \frac{0,0087}{2} \right) = 101,1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

При  $b = 110$  мм

$$\tau' = \frac{Q_{\max} S_x^*}{I_x b} = \frac{-37,5 \cdot 101,1 \cdot 10^{-6}}{2550 \cdot 10^{-8} \cdot 0,11} = -1,35 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2 = -1,35 \text{ МПа}.$$

При  $b = s = 5,4$  мм

$$\tau'' = \frac{Q_{\max} S_x^*}{I_x b} = \frac{-37,5 \cdot 101,1 \cdot 10^{-6}}{2550 \cdot 10^{-8} \cdot 0,0054} = -27,5 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2 = -27,5 \text{ МПа}.$$

Точка 3.  $S_x^* = 131 \text{ см}^3$  – берется из справочника.

$$\tau = \frac{-37,5 \cdot 131 \cdot 10^{-6}}{2550 \cdot 10^{-8} \cdot 0,0054} = -35,7 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2 = -35,7 \text{ МПа}.$$

Строим эпюры напряжений (рис. 5.20).

**6.** Максимальное касательное напряжение имеет место на нейтральной линии, т. е.  $\tau_{\max} = |-35,7| \text{ МПа}$ .

Следовательно, для балки двутаврового сечения

$$\tau_{\max} = 35,7 \text{ МПа} < 80 \text{ МПа} = [\tau].$$

Условие прочности выполняется.

7. Вычислим прогибы балки  $y$  и углы поворота  $\theta$  в характерных точках балки.

Запишем универсальное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки. Начало координат выбираем на левом конце балки (рис. 2.8, в). Уравнение изгибающего момента составляем для крайнего правого сечения, используя специальные приемы. Распределенную нагрузку  $q$  достраиваем до конца балки и на этом же участке компенсируем ее (рис. 2.8, в).

$$EI y'' = R_A z + F(z-l) - \frac{q(z-l)^2}{2} + \frac{q(z-3l)^2}{2} + M(z-3l)^0; \quad (5.30)$$

$$EI y' = \frac{R_A z^2}{2} + \frac{F(z-l)^2}{2} - \frac{q(z-l)^3}{6} + \frac{q(z-3l)^3}{6} + M(z-3l) + C; \quad (5.31)$$

$$EI y = \frac{R_A z^3}{6} + \frac{F(z-l)^3}{6} - \frac{q(z-l)^4}{24} + \frac{q(z-3l)^4}{24} + \frac{M(z-3l)^2}{2} + Cz + D; \quad (5.32)$$

Для определения прогибов  $y$  используем уравнение (5.32).

Произвольные постоянные  $C$  и  $D$  определим из условий закрепления балки:

1)  $z = 0; y = 0 \Rightarrow$  подставим эти значения в уравнение (5.32) и получим  $D = 0$ ;

2)  $z = 4l = 4 \text{ м}; y = 0 \Rightarrow$  подставим в уравнение (4.32):

$$0 = \frac{-37,5 \cdot 4^3}{6} + \frac{50 \cdot (4-1)^3}{6} - \frac{10 \cdot (4-1)^4}{24} + \frac{10 \cdot (4-3)^4}{24} + \frac{40 \cdot (4-3)^2}{2} + C \cdot 4;$$

$$C = 47,8 \text{ кНм}^2.$$

Далее определим углы поворота  $\theta$  и прогибы  $y$  в характерных точках балки, используя уравнения (5.31) и (5.32):

7.1.  $z = l = 1 \text{ м}$ :

$$EI y' = \frac{R_A l^2}{2} + C = \frac{-37,5 \cdot 1^2}{2} + 47,08 = 28,33 \text{ кНм}^2;$$

$$\theta = y' = \frac{28,33}{EI} = \frac{28,33}{2 \cdot 10^8 \cdot 2550 \cdot 10^{-8}} = 0,0055 \text{ рад.}$$

$$EIy = \frac{R_A l^3}{6} + Cl = \frac{-37,5 \cdot 1^3}{6} + 47,08 \cdot 1 = 40,83 \text{ кНм}^3;$$

$$y = \frac{40,83}{EI} = \frac{40,83}{2 \cdot 10^8 \cdot 2550 \cdot 10^{-8}} = 0,008 \text{ м} = 8 \text{ мм.}$$

7.2.  $z = 3l = 3 \text{ м}$ :

$$\begin{aligned} EI y' &= \frac{R_A z^2}{2} + \frac{F(z-l)^2}{2} - \frac{q(z-l)^3}{6} + C = \\ &= \frac{-37,5 \cdot 3^2}{2} + \frac{50 \cdot (3-1)^2}{2} - \frac{10(3-1)^3}{6} + 47,08 = -35 \text{ кНм}^2; \end{aligned}$$

$$\theta = y' = \frac{-35}{EI} = \frac{-35}{2 \cdot 10^8 \cdot 2550 \cdot 10^{-8}} = -0,0069 \text{ рад.}$$

$$\begin{aligned} EI y &= \frac{R_A z^3}{6} + \frac{F(z-l)^3}{6} - \frac{q(z-l)^4}{24} + Cz = \\ &= \frac{-37,5 \cdot 3^3}{6} + \frac{50 \cdot (3-1)^3}{6} - \frac{10(3-1)^4}{24} + 47,08 \cdot 3 = 32,49 \text{ кНм}^3; \end{aligned}$$

$$y = \frac{32,49}{EI} = \frac{32,49}{2 \cdot 10^8 \cdot 2550 \cdot 10^{-8}} = 0,0064 \text{ м} = 6,4 \text{ мм.}$$

7.3. Определим углы поворота в точках опор, так как здесь они чаще всего принимают максимальные значения:

Подставим в уравнение (5.31)  $z = 0$ :

$$\theta = y' = \frac{C}{EI} = \frac{47,8}{2 \cdot 10^8 \cdot 2550 \cdot 10^{-8}} = 0,0094 \text{ рад.}$$

Подставим в уравнение (3.31)  $z = 4 \text{ м}$ :

$$EI y' = \frac{R_A z^2}{2} + \frac{F(z-l)^2}{2} - \frac{q(z-l)^3}{6} + \frac{q(z-3l)^3}{6} + M(z-3l) + C =$$

$$= \frac{-37,5 \cdot 4^2}{2} + \frac{50 \cdot (4-1)^2}{2} - \frac{10 \cdot (4-1)^3}{6} + \frac{10 \cdot (4-3 \cdot 1)^3}{6} +$$

$$+ 40 \cdot (4-3 \cdot 1) + 47,8 = -30,5 \text{ кНм}^2;$$

$$\theta = y' = \frac{-30,5}{EI} = \frac{-30,5}{2 \cdot 10^8 \cdot 2550 \cdot 10^{-8}} = -0,006 \text{ рад.}$$

8. Строим эпюру  $y$  в масштабе (рис. 5.19,  $z$ ). Если изгибающий момент  $M$  на участке больше нуля ( $M > 0$ ), то кривая  $y$  выпуклостью вниз. Если  $M < 0$ , то кривая  $y$  выпуклостью вверх.

9. Проверим балку по условию жесткости. Допускаемые значения прогибов для двухопорных балок:

$$[y] = \frac{1}{500} l = \frac{1}{500} \cdot 4 = 0,008 \text{ м.}$$

Допускаемые значения углов поворота для двухопорных балок:

$$[\theta] = 0,01 \text{ рад.}$$

$$y_{\max} = 0,008 \text{ м} = [y] = 0,008 \text{ м}; \quad \theta_{\max} = 0,0094 \text{ рад} < [\theta] = 0,01 \text{ рад.}$$

Вывод: условие жесткости выполняется.

### ***ИЗ № 5 «Расчет вала на прочность и жесткость»***

Для вала, работающего на кручение (рис. 2.10,  $a$ ), требуется:

- 1) построить эпюру крутящих моментов  $M_z$ ;
- 2) из условия прочности вычислить диаметр опасного сечения вала;
- 3) определить касательные напряжения на всех участках вала и построить эпюру напряжений;
- 4) построить эпюру углов закручивания  $\varphi$ .

#### **Пример выполнения ИЗ № 5**

**Дано:**

- 1) допускаемое касательное напряжение  $[\tau] = 50 \text{ МПа}$ ;
- 2) длины участков  $l_1 = 0,6 \text{ м}$ ;  $l_2 = 0,6 \text{ м}$ ;  $l_3 = 0,5 \text{ м}$ ;
- 3) крутящие моменты  $T_1 = 10 \text{ кНм}$ ;  $T_2 = 20 \text{ кНм}$ .
- 4) модуль сдвига  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ .

Таблица 2.9

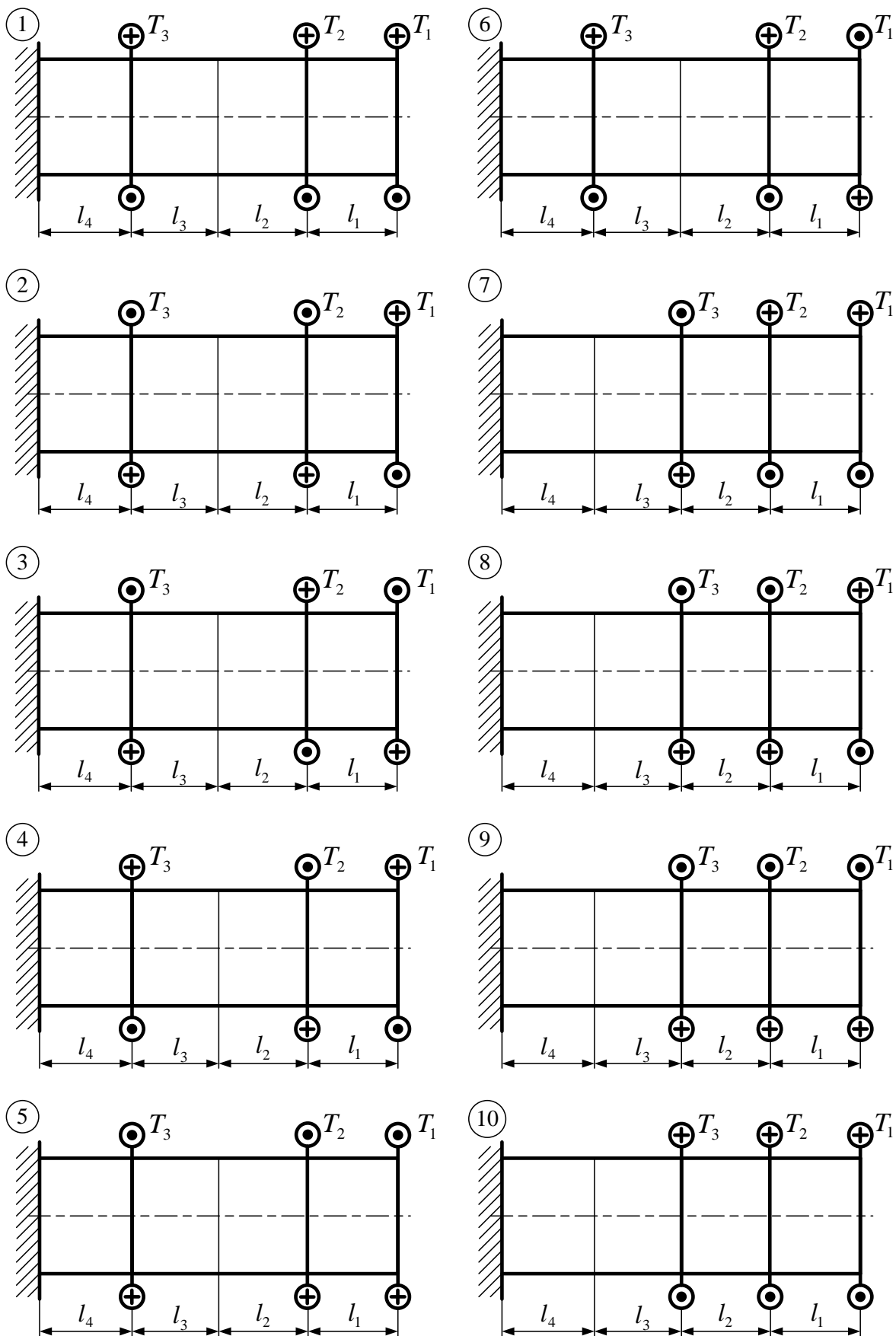


Таблица 2.10

Номер варианта	$l_1$ , м	$l_2$ , м	$l_3$ , м	$l_4$ , м	$T_1$ , кНм	$T_2$ , кНм	$T_3$ , кНм
1	0,2	0,3	0,4	0,1	10	30	15
2	0,3	0,2	0,5	0,2	15	20	40
3	0,4	0,1	0,6	0,3	20	10	25
4	0,3	0,3	0,4	0,4	30	45	10
5	0,5	0,5	0,6	0,5	15	25	30
6	0,5	0,2	0,4	0,6	30	25	35
7	0,3	0,4	0,2	0,15	25	40	20
8	0,2	0,5	0,6	0,25	10	40	20
9	0,2	0,4	0,3	0,35	40	50	20
10	0,1	0,6	0,5	0,45	20	25	30

**Решение.** 1. Разбиваем вал на участки, начиная с незакрепленного конца. Границами участков являются сечения с сосредоточенными крутящими моментами.

Для нахождения крутящих моментов применим метод сечений на каждом из участков. В пределах каждого участка проводим нормальное сечение на расстоянии  $z$  от границы с предыдущим. Мысленно отбрасываем левую часть вала, оставшуюся уравниваем.

Участок 1,  $0 \leq z_1 \leq l_1$ :

$$M_z = T_1 = 10 \text{ кНм.}$$

Участок 2,  $0 \leq z_2 \leq l_2$ :

$$M_z = T_1 - T_2 = 10 - 20 = -10 \text{ кНм.}$$

Участок 3,  $0 \leq z_3 \leq l_3$ :

$$M_z = T_1 - T_2 - T_1 = 10 - 20 - 10 = -20 \text{ кНм.}$$

Строим эпюру крутящих моментов  $M_z$  (рис. 4.2, б).

2. Определяем диаметр вала в опасном сечении из условия прочности при кручении.

Опасное сечение находится там, где действует наибольший крутящий момент  $M_{z_{\max}} = |-20| \text{ кНм.}$

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_{z_{\max}}}{0,2[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{20 \cdot 10^6}{0,2 \cdot 50}} = 126 \text{ мм.}$$

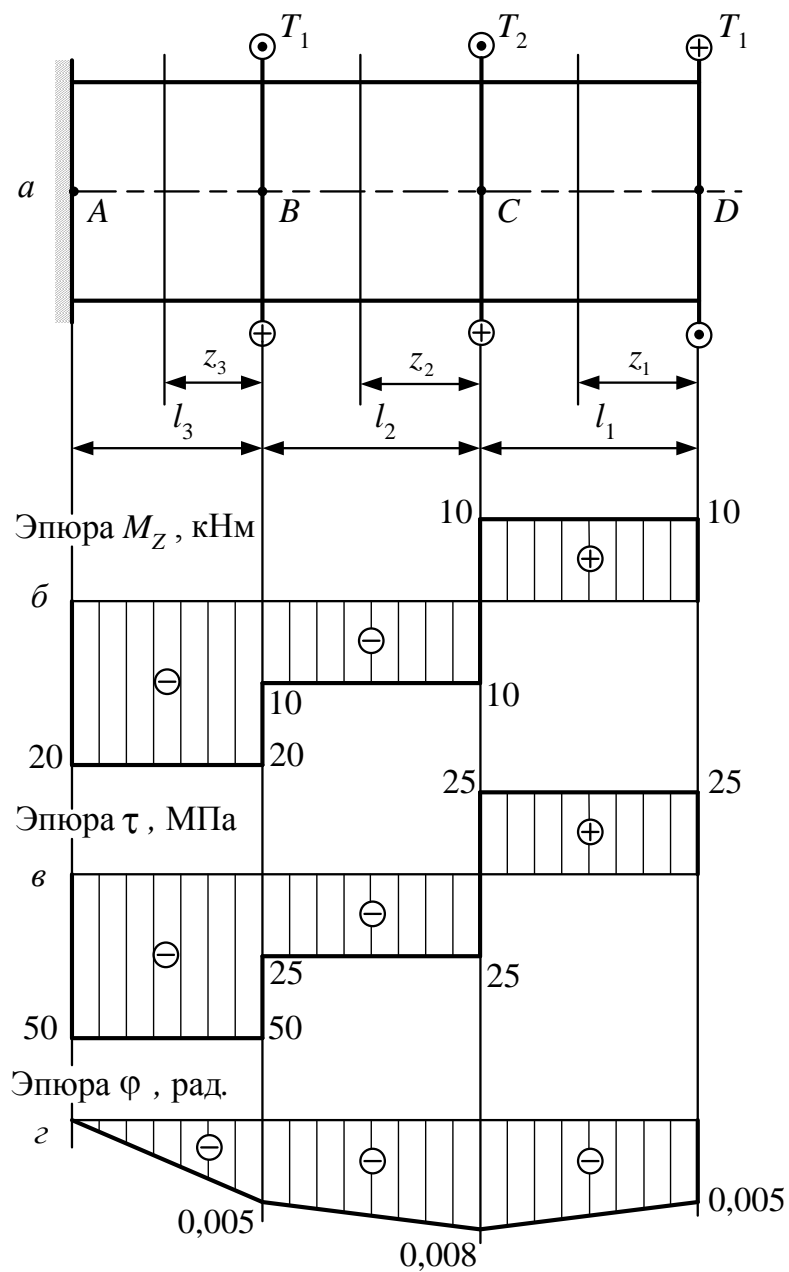


Рис. 2.10

3. Определяем касательные напряжения на каждом участке:

$$\tau_{(1)} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{M_z}{0,2d^3} = \frac{10 \cdot 10^6}{0,2 \cdot 126^3} = 25 \text{ МПа};$$

$$\tau_{(2)} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{M_z}{0,2d^3} = \frac{-10 \cdot 10^6}{0,2 \cdot 126^3} = -25 \text{ МПа};$$

$$\tau_{(3)} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{M_z}{0,2d^3} = \frac{-20 \cdot 10^6}{0,2 \cdot 126^3} = -50 \text{ МПа}.$$

Строим эпюру касательных напряжений  $\tau$  (рис. 4.2, б).

4. Определяем углы закручивания сечений вала. При этом рассматриваем вал с закрепленного конца. Проставляем характерные точки границ участков  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ .

В точке  $A$  угол поворота равен нулю;

$$\varphi_A = 0.$$

В точке  $B$

$$\varphi_B = \varphi_A + \Delta\varphi_{AB} = \varphi_A + \frac{M_z I_3}{G I_p} = 0 + \frac{-20 \cdot 10^6 \cdot 0,5 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 0,1 \cdot 126^4} = -0,005 \text{ рад.}$$

В точке  $C$

$$\varphi_C = \varphi_B + \Delta\varphi_{BC} = \varphi_B + \frac{M_z I_2}{G I_p} = -0,005 + \frac{-10 \cdot 10^6 \cdot 0,6 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 0,1 \cdot 126^4} = -0,008 \text{ рад.}$$

В точке  $D$

$$\varphi_D = \varphi_C + \Delta\varphi_{CD} = \varphi_C + \frac{M_z I_1}{G I_p} = -0,008 + \frac{10 \cdot 10^6 \cdot 0,6 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 0,1 \cdot 126^4} = -0,005 \text{ рад.}$$

Строим эпюру углов закручивания  $\varphi$  (рис. 2.10,  $z$ ).

5. Проверяем вал по условию жесткости  $\theta_{\max} \leq [\theta]$ :

$$|\theta_{\max}| = \frac{M_{z_{\max}}}{G I_p} = \frac{20 \cdot 10^6}{8 \cdot 10^4 \cdot 0,1 \cdot 126^4} = 1 \cdot 10^{-5} \text{ рад/мм} = 0,01 \text{ рад/м.}$$

Допускаемый угол поворота принимается конструктивно. В машиностроении в большинстве случаев принимается  $[\theta] = 0,01$  рад на один метр длины вала:

$$\theta_{\max} = 0,01 \text{ рад/м} = [\theta] = 0,01 \text{ рад/м.}$$

Вывод: условие жесткости выполняется.

### ***ИЗ № 6 «Определение геометрических характеристик сложного сечения»***

Для сложного сечения, приведенного на рисунке 2.11,  $a$ , требуется:

- 1) определить координаты центров тяжести составных фигур сложного сечения относительно вспомогательных осей  $X_1 Y_1$  и  $X_2 Y_2$ ;
- 2) определить статические моменты площадей составных фигур сложного сечения;
- 3) определить координаты центра тяжести сложного сечения;
- 4) определить величины осевых моментов инерции  $J_{x_c}^I$ ,  $J_{y_c}^I$  и  $J_{x_c}^{II}$ ,  $J_{y_c}^{II}$  составных фигур сложного сечения относительно центральных осей  $X_c$ ,  $Y_c$ ;
- 5) определить величины осевых моментов инерции  $J_{x_c}$ ,  $J_{y_c}$  сложного сечения относительно центральных осей  $X_c$ ,  $Y_c$ ;

Таблица 2.11

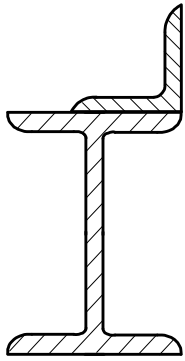
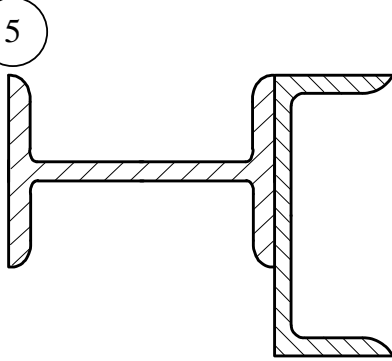
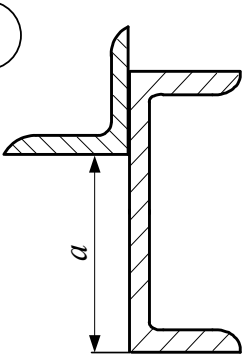
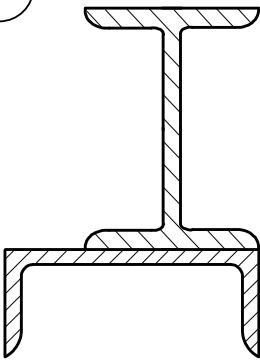
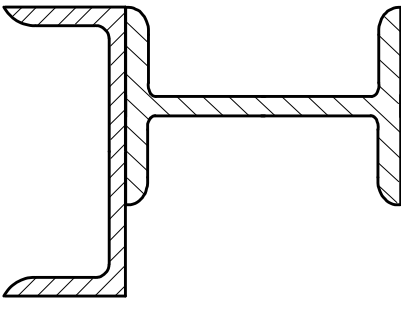
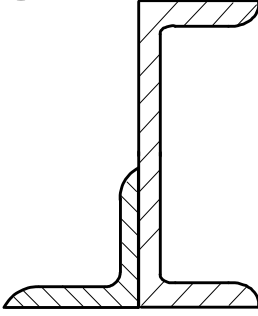
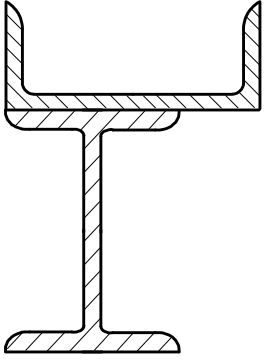
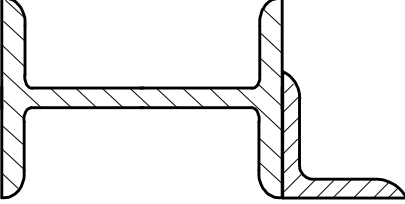
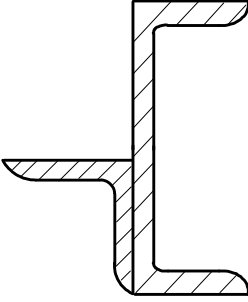
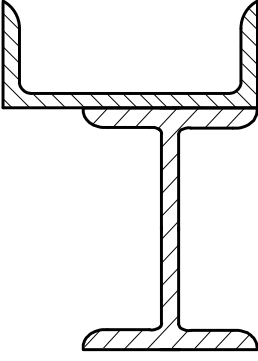
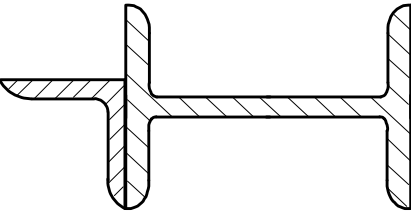
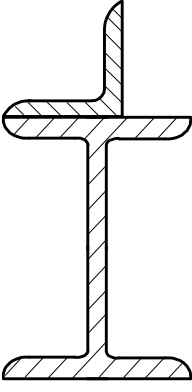
<p>1</p> 	<p>5</p> 	<p>9</p> 
<p>2</p> 	<p>6</p> 	<p>10</p> 
<p>3</p> 	<p>7</p> 	<p>11</p> 
<p>4</p> 	<p>8</p> 	<p>12</p> 

Таблица 2.12

Номер варианта	Номер двутавра ГОСТ	Номер швеллера	Номер уголка
1	12	18	4,0
2	12	12	8,0
3	14	10	18,0
4	24	20	14,0
5	16	22	9,0
6	14	8	8,0
7	20	16	10,0
8	24	12	16,0
9	20	24	7,5
10	22	16а	5,0
11	20	14	6,3
12	16	14	10,0

6) определить центробежные моменты  $J_{x_c y_c}^I$ ,  $J_{x_c y_c}^{II}$  составных фигур сложного сечения относительно центральных осей  $X_c$ ,  $Y_c$ ;

7) определить центробежный момент  $J_{x_c y_c}$  сложного сечения относительно центральных осей  $X_c$ ,  $Y_c$ ;

8) определить положение главных центральных осей  $V$  и  $U$  сложного сечения;

9) определить величины главных центральных моментов инерции  $J_{u_{\max}}$ ,  $J_{v_{\min}}$  сложного сечения;

10) определить величины главных радиусов инерции  $i_u$ ,  $i_v$  сложного сечения;

11) выполнить проверку правильности расчетов.

#### Пример выполнения ИЗ № 6

**Дано:**

1) сложное сечение состоит из швеллера № 16 и двутавра № 20 (рис. 2.11, а);

2) характеристики сечений:

[ № 16:  $h_1 = 16$  см;  $b_1 = 6,4$  см;  $s_1 = 0,5$  см;  $t_1 = 0,84$  см;  $A_1 = 18,1$  см<sup>2</sup>;

$$J_x^I = 747 \text{ см}^4; J_y^I = 63,3 \text{ см}^4; z_{01} = 1,8 \text{ см};$$

I № 20:  $h_2 = 20$  см;  $b_2 = 10$  см;  $s_2 = 0,52$  см;  $t_2 = 0,84$  см;

$$A_2 = 26,8 \text{ см}^2; J_x^{II} = 1840 \text{ см}^4; J_y^{II} = 115 \text{ см}^4.$$

**Решение.**

1. Определим координаты центров тяжести составных фигур сложного сечения относительно вспомогательных осей  $X_1 Y_1$  и  $X_2 Y_2$  (рис. 2.11, б):

- для швеллера:

$$x_1 = b_1 - z_{01} = 6,4 - 1,8 = 4,6 \text{ см,}$$

$$y_1 = \frac{h_1}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ см.}$$

- для двутавра:

$$x_2 = b_1 + \frac{h_2}{2} = 6,4 + \frac{20}{2} = 16,4 \text{ см;}$$

$$y_2 = h_1 - \frac{b_2}{2} = 16 - \frac{10}{2} = 11 \text{ см.}$$

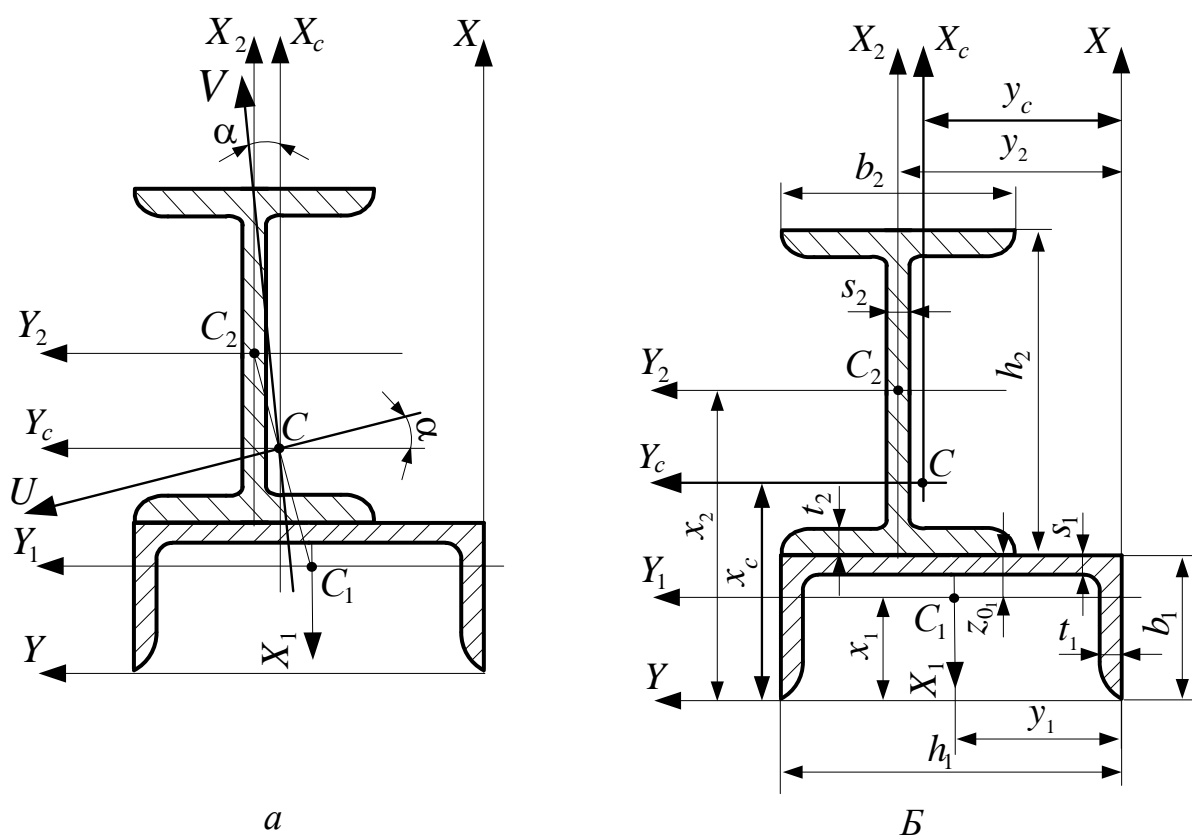


Рис. 2.11

2. Определим статические моменты площадей составных фигур сложного сечения по формулам 3.1:

$$S_x^I = y_1 A_1 = 8 \cdot 18,1 = 144,8 \text{ см}^3;$$

$$S_y^I = x_1 A_1 = 4,6 \cdot 18,1 = 83,26 \text{ см}^3;$$

$$S_x^{II} = y_2 A_2 = 11 \cdot 26,8 = 294,8 \text{ см}^3;$$

$$S_y^{II} = x_2 A_2 = 16,4 \cdot 26,8 = 439,52 \text{ см}^3.$$

3. Определим координаты центра тяжести сложного сечения (3.3)

$$x_c = \frac{\sum S_y^i}{\sum A_i} = \frac{S_y^I + S_y^{II}}{A_1 + A_2} = \frac{83,26 + 439,52}{18,1 + 26,8} = 11,64 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{\sum S_x^i}{\sum A_i} = \frac{S_x^I + S_x^{II}}{A_1 + A_2} = \frac{144,8 + 294,8}{18,1 + 26,8} = 9,79 \text{ см}.$$

4. Определим величины осевых моментов инерции  $J_{x_c}^I$ ,  $J_{y_c}^I$  и  $J_{x_c}^{II}$ ,  $J_{y_c}^{II}$  и центробежных моментов  $J_{x_c y_c}^I$ ,  $J_{x_c y_c}^{II}$  (3.8) составных фигур сложного сечения относительно центральных осей  $X_c$ ,  $Y_c$ .

Определим расстояния между осями  $X_i$ ,  $X_c$  и  $Y_i$ ,  $Y_c$ :

$$a_1 = y_1 - y_c = 8 - 9,79 = -1,79 \text{ см};$$

$$c_1 = x_1 - x_c = 4,6 - 11,64 = -7,04 \text{ см};$$

$$a_2 = y_2 - y_c = 11 - 9,79 = 1,21 \text{ см};$$

$$c_2 = x_2 - x_c = 16,4 - 11,64 = 4,76 \text{ см}.$$

Определим величины осевых моментов инерции  $J_{x_c}^I$ ,  $J_{y_c}^I$  и  $J_{x_c}^{II}$ ,  $J_{y_c}^{II}$ :

$$J_{x_c}^I = J_x^I + a_1^2 A_1 = 747 + 1,79^2 \cdot 18,1 = 805 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_c}^I = J_y^I + c_1^2 A_1 = 63,3 + 7,04^2 \cdot 18,1 = 960,36 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_c}^{II} = J_x^{II} + a_2^2 A_2 = 115 + 1,21^2 \cdot 26,8 = 154,24 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_c}^{II} = J_y^{II} + c_2^2 A_2 = 1840 + 4,76^2 \cdot 26,8 = 2447,22 \text{ см}^4.$$

На рисунке 3.12 оси  $X$  и  $Y$  поменяли свое положение относительно указанного в ГОСТ, поэтому осевые моменты инерции двутавра  $J_x^{II} = 1840 \text{ см}^4$  и  $J_y^{II} = 115 \text{ см}^4$  поменялись значениями –  $J_y^{II} = 1840 \text{ см}^4$  и  $J_x^{II} = 115 \text{ см}^4$

5. Определим величины осевых моментов инерции  $J_{x_c}$ ,  $J_{y_c}$  сложного сечения, относительно центральных осей  $X_c$ ,  $Y_c$ ;

$$J_{x_c} = J_{x_c}^I + J_{x_c}^{II} = 805 + 154,24 = 959,24 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_c} = J_{y_c}^I + J_{y_c}^{II} = 960,4 + 2447,22 = 3407,62 \text{ см}^4.$$

6. Определим центробежные моменты  $J_{x_c y_c}^I$ ,  $J_{x_c y_c}^{II}$  составных фигур сложного сечения относительно центральных осей  $X_c$ ,  $Y_c$ ;

$$J_{x_c y_c}^I = J_{xy}^I + a_1 c_1 A_1 = 0 + (-1,79) \cdot (-7,04) \cdot 18,1 = 228,1 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_c y_c}^{II} = J_{xy}^{II} + a_2 c_2 A_2 = 1,21 \cdot 4,76 \cdot 26,8 = 154,36 \text{ см}^4.$$

7. Определим центробежный момент  $J_{x_c y_c}$  сложного сечения относительно центральных осей  $X_c$ ,  $Y_c$ ;

$$J_{x_c y_c} = J_{x_c y_c}^I + J_{x_c y_c}^{II} = 228,1 + 154,36 = 382,46 \text{ см}^4.$$

8. Определим положение главных центральных  $v$ ,  $u$  сложного сечения.

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{x_c y_c}}{J_{y_c} - J_{x_c}} = \frac{2 \cdot 382,4}{3407,62 - 959,24} = 0,312; \quad 2\alpha_0 = 17,35^\circ; \quad \alpha_0 = 8,67^\circ.$$

9. Определим величины главных центральных моментов инерции  $J_{u_{\max}}, J_{v_{\min}}$  сложного сечения.

$$\begin{aligned} J_{u_{\max}} &= \frac{J_{x_c} + J_{y_c}}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_{y_c} - J_{x_c}}{2}\right)^2 + J_{x_c y_c}^2} = \\ &= \frac{959,24 + 3407,62}{2} + \sqrt{\left(\frac{3407,62 - 959,24}{2}\right)^2 + 382,46^2} = \\ &= 2183,43 + 1282,54 = 3465,97 \text{ см}^2; \\ J_{u_{\min}} &= \frac{J_{x_c} + J_{y_c}}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_{y_c} - J_{x_c}}{2}\right)^2 + J_{x_c y_c}^2} = \\ &= \frac{959,24 + 3407,62}{2} - \sqrt{\left(\frac{3407,62 - 959,24}{2}\right)^2 + 382,46^2} = \\ &= 2183,43 - 1282,54 = 900,9 \text{ см}^2; \end{aligned}$$

10. Определим величины главных радиусов инерции  $i_u, i_v$  сложного сечения.

$$\begin{aligned} i_{u_{\max}} &= \sqrt{\frac{J_{u_{\max}}}{\sum A_i}} = \sqrt{\frac{3465,97}{44,9}} = 8,79 \text{ см}; \\ i_{v_{\min}} &= \sqrt{\frac{J_{v_{\min}}}{\sum A_i}} = \sqrt{\frac{900,9}{44,9}} = 4,48 \text{ см}. \end{aligned}$$

11. Выполним проверку правильности расчетов.

Первая проверка:

$$\begin{aligned} J_{\max} + J_{\min} &= J_{x_c} + J_{y_c}; \\ 3465,97 + 900,9 &= 959,24 + 3407,62; \quad 4366,87 \approx 4366,86. \end{aligned}$$

Вторая проверка:

$$\begin{aligned} J_{uv} &= \frac{J_{x_c} J_{y_c}}{2} \sin 2\alpha + J_{x_c y_c} \cos 2\alpha = 0; \\ J_{uv} &= \frac{959,24 - 3407,62}{2} \sin 17,35^\circ + 382,46 \cos 17,35^\circ = -364,8 + 365,06 \approx 0. \end{aligned}$$

Проверки выполняются, следовательно, расчеты верны.

**Методические рекомендации по выполнению индивидуальных заданий:**

Обучающиеся должны выполнить и защитить индивидуальные работы (ИЗ) по модулям. ИЗ должны быть оформлены в соответствии с требованиями Стандарта университета «Общие требования к построению, изложению и оформлению документов учебной деятельности» [Электронный ресурс]/ Красноярск: СФУ, 2021, СТУ 7.5-07-2021, <http://www.sfu-kras.ru/node/8127>.

**Критерии оценивания индивидуальных заданий:**

Оценка	Требования
«Зачтено»	Оценка «зачтено» выставляется студенту, если ИЗ выполнено правильно и надлежащим образом оформлено, а также студент свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний, причем не затрудняется с ответом при видоизменении заданий, владеет разносторонними навыками и приемами выполнения практических задач.
«Не зачтено»	Оценка «не зачтено» выставляется студенту, если ИЗ выполнено неправильно и не надлежащим образом оформлено, а также студент не справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний, затрудняется с ответом при видоизменении заданий, не владеет приемами выполнения практических задач.

Разработчик



О. В. Конищева