

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»



УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
Д.С. Гуц / Д.С. Гуц /
«10» марта 2023 г.

ПРОГРАММА
кандидатского экзамена по научной специальности
1.1.6 Вычислительная математика

Красноярск 2023

ПРОГРАММА-МИНИМУМ

кандидатского экзамена по специальности

1.1.6 Вычислительная математика

Часть 1. Функциональный анализ

Метрические пространства. Полнота. Непрерывные отображения. Компактные множества. Принцип сжатых отображений, метод последовательных приближений и их приложения. Сильная и слабая сходимости. Задача о наилучшем приближении. Наилучшее равномерное приближение. Минимальное свойство коэффициентов Фурье.

Линейные функционалы и операторы. Непрерывные линейные операторы. Норма и спектральный радиус оператора. Сходимость операторов. Обратимость. Ряд Неймана и условия его сходимости. Теоремы о существовании обратного оператора. Мера обусловленности линейного оператора и ее применение при замене точного уравнения(решения) приближенным. Сопряженное пространство. Принцип равномерной ограниченности, теорема Банаха-Штейнгауза и ее приложения. Теорема Рисса (для гильбертова пространства). Спектр оператора. Сопряженные, самосопряженные, симметричные, положительно определенные, вполне непрерывные операторы и их спектральные свойства. Вариационные методы минимизации квадратичных функционалов, решения уравнений и нахождения собственных значений (методы Ритца, Бубнова-Галеркина, наименьших квадратов). Дифференцирование линейных операторов, производные Фреше и Гато. Метод Ньютона, его сходимость и применение. Теоремы Фредгольма для уравнений с вполне непрерывным оператором. Теорема Гильберта-Шмидта.

Обобщенная производная. Неравенства Пуанкаре-Стеклова-Фридрихса. Понятие о теоремах вложения. Пространство вложенных функций.

Часть 2. Задачи математической физики

Математические модели физических задач, приводящие к уравнениям математической физики. Основные уравнения математической физики; постановки задач. Корректно и некорректно поставленные задачи. Обобщенное решение краевых задач и задач на собственные значения для эллиптических уравнений в сопряженной форме. Основные свойства гармонических функций (формулы Грина, теоремы о среднем, принцип максимума). Фундаментальное решение и функция Грина для уравнения Лапласа. Вариационные методы решения краевых задач (Ритца, Галеркина, наименьших квадратов). Задача Коши для уравнения теплопроводности и

уравнения колебаний (в одномерном и многомерном случаях).
Фундаментальные решения смешанных задач с однородными краевыми условиями для уравнений параболического и гиперболического типов; существование, единственность и непрерывная зависимость. Метод Фурье. Метод Галеркина. Линейные оптимизационные модели. Условия оптимальности и двойственности в задачах линейного и квадратичного программирования.

Часть 3. Численные методы.

Прямые и итерационные методы решения систем линейных уравнений с полными матрицами специального вида. Одношаговые итерационные методы . Чебышевские одношаговые итерационные методы. Оптимальный набор чебышевских параметров и вычислительная устойчивость. Трехчленные (двушаговые) чебышевские итерационные методы. Методы сопряженных градиентов решения линейных систем и спектральных задач. Применение методов регуляризации, минимизации сглаживающего функционала и итерационных методов для решения вырожденных, несовместных и плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений и интегральных уравнений 1 рода.

Симплекс-метод решения задач линейного программирования. Методы проекции градиента и условного градиента решения задач нелинейной оптимизации. Метод штрафных функций.

Общие свойства ортогональных систем многочленов. Многочлены Лежандра и Чебышева; их свойства и приложения. Быстрое дискретное преобразование Фурье и его применение в теории приближений и методах решения задач математической физики. Интерполяция сплайнами. Методы спуска для поиска экстремума функционалов.

Задача оптимизации квадратуры. Квадратурные формулы типа Гаусса. Квадратурные формулы со случайными узлами. Многомерные интерполяционные, симметричные квадратурные формулы. Интегрирование сильно осциллирующих функций.

Численные методы решения задач Коши и краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Оценка погрешности, сходимость и устойчивость. Однородные разностные схемы. Понятие о жестких системах уравнений и методах их решения. Основные понятия теории разностных схем (аппроксимация, сходимость, устойчивость). Методы построения разностных схем (метод сеток, интегро-интерполяционный метод, метод аппроксимации интегральных тождеств, вариационно-разностные и проекционные методов, метод аппроксимации

квадратичного функционала); их применение для решения краевых задач для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений. Оценка порядка точности. Дивергентные, консервативные разностные схемы. Двухслойные и трехслойные схемы; их устойчивость. Методы расщепления многомерных нестационарных задач. Понятие об экономических методах решения многомерных задач. Нелинейные уравнения (теплопроводности и газодинамики). Методы решения разностных уравнений. Прямые методы (прогонки, быстрого преобразования Фурье, циклической редукции). Метод последовательной верхней релаксации, неявные схемы с эквивалентными по спектру операторами, попеременно-треугольный метод, метод сопряженных градиентов. Методы расщепления и переменных направлений. Оценка сходимости.

Языки программирования высокого уровня: архитектура и сравнительный анализ. Критерий выбора языка для разработки прикладных программ. Машинные форматы представления числовых данных. Машинная арифметика. Влияние особенностей реализации машинной арифметики на погрешность вычислительных алгоритмов. Эффективность программной реализации вычислительного алгоритма. Оптимизирующие возможности компиляторов. Влияние архитектурных особенностей ЭВМ на реализацию и эффективность алгоритмов. Реализация алгоритмов на базе матричных и конвейерных процессов. Особенности реализации алгоритмов в многопроцессорных вычислительных системах. Логическая организация данных на внешних носителях. Эффективные алгоритмы доступа к данным. Архитектура систем управления базами данных.

Интегральная и дифференциальная формы законов сохранения массы, импульса и энергии. Уравнения газовой динамики. Уравнения магнитной гидродинамики характеристики. Инварианты Римана. Волны сжатия и разряжения. Сильные и слабые ударные волны. Задача о распаде разрыва. Расщепление уравнений по физическим процессам и пространственным направлениям. Методы построения разностных схем для уравнений газовой динамики. Метод характеристик. Методы сквозного счета. Метод расщепления матричных коэффициентов. Методы построения расчетных сеток. алгебраические методы. Методы, основанные на решении дифференциальных уравнений. Адаптивные сетки. Численная реализация алгоритмов построения сеток. Однородные разностные схемы. Схемы с псевдовязкостью. консервативные схемы для нестационарной газовой динамики. Экономичные разностные схемы для многомерных задач математической физики. Методы расщепления нестационарных задач. Многокомпонентное расщепление задач.

Численные методы решения уравнений типа уравнений пограничного слоя. Численные методы решения уравнений Навье-Стокса для сжимаемой и несжимаемой жидкости. Схемы в газодинамических переменных. Схемы в криволинейных координатах. Схемы для уравнений в консервативной форме. Расщепление по физическим процессам. Расщепление по пространственным направлениям. Реализация разностных схем. Исследования на устойчивость. Анализ устойчивости разностных схем методов дифференциального приближения. Анализ аппроксимационной вязкости разностных схем. Инвариантные разностные схемы.

Литература

1. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии / П.С. Александров. -Сп-б.: Лань, 2008 г. ISBN 978-5-8114-0812-2.
2. Антонов А.С. Параллельное программирование с использованием технологии ОрепМР: Учебное пособие. - М.: Изд-во МГУ, 2009. - 77 с.
3. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В. И. Арнольд. - Ижевск: УдмГУ, 2000 г., -368 с.
4. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С.Бахвалов, Н.П. Жидков, Б.М.Кобельков. -М.: Бином. Лаборатория знаний, 2011 г.
5. Боресков А.В., Харламова А.А. Основы работы с технологией CUDA. - М.: ДМК Пресс, 2010. -232 с.
6. Вержбицкий В.М. Численные методы / В.М. Вержбицкий. - М.: Высш.шк; 2005 г.
7. Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С.Владимиров, В.В.Жаринов. - М.: Физматлит, 2008 г., - 400 с.
8. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах: Учебное пособие для ВУЗов. Мю: Физматлит. 2004.
9. Калиткин Н.Н. Численные методы / Н.Н.Калиткин. -Сп.-б.: БХВ-Петербург, 2011 г.-592 с.
10. Ю.Ковеня В.М. Разностные методы решения многомерных задач. Новосибирск: НГУ, 2004.
11. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функциональный анализ / А.Н. Колмогоров, С.В.Фомин. -М.: Физматлит, 2009/ – 572 с.
12. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3 т. / Л.Д. Кудрявцев - Дрофа, 2003. - 704 с.
13. П.Курош А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г.Курош. –М: Физматкнига, 2007 г. 432 с.

14. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры / А.И. Мальцев. –М: Лань, 2009 г., - 480 с.
15. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики / Г.И.Марчук. - М.: Лань, 2009 г., - 608 с.
16. Петров И.Б., Лобанов А.И. Лекции по вычислительной математике. М.: Интернет-Университет Информационных Технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.
17. Петровский И.Г. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям / -М.: Физматлит, 2009 г., - 208 с.
18. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С.Понтрягин. – М: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001 г., 400 с.
19. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И.И.Привалов. -М: Лань, 2009 г., -432 с.
20. Самарский А.А. Лишенные методы математической физики / А.А.Самарский, А.В. Дулин. -М: Научный мир, 2003 г.
21. Самарский А.А. Численные методы математической физики / А.А.Самарский, А.В.Гулин. -М: Научный мир, 2003 г.
22. Сухарев А.Г, Курс методов оптимизации / А.Г.Сухарев, А.В.Тимохов, В.Федоров. – М: Физматлит, 2005 г., -368 с.
23. Треногин В.А. Функциональный анализ I В.А.Треногин. – М: Физматлит, 2007 г., -488 с.
24. Фаддеев Д.К. Вычислительные методы линейной алгебры / Д.К.Фаддеев, В.И.Фаддеева. – М: Дань, 2002 г., -736 с.

Разработчик

Заведующий базовой кафедрой
вычислительных и информационных технологий,
д. ф.-м. наук, профессор

Шайдуров В.В.