Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
________________ / Д.С. Гуц /
«10» марта 2023 г.

ПРОГРАММА
кандидатского экзамена по научной специальности
1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Красноярск 2023

ПРОГРАММА-МИНИМУМ

кандидатского экзамена по специальности

1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ

ОБЩАЯ ЧАСТЬ

I. Действительный анализ

1. Меры, измеримые функции, интеграл

Аддитивные функции множеств (меры), счетная аддитивность мер. Конструкция лебеговского продолжения. Измеримые функции. Сходимость функций по мере и почти всюду. Теоремы Егорова и Лузина. Интеграл Лебега. Предельный переход под знаком интеграла. Сравнение интегралов Лебега и Римана. Прямые произведения мер. Теорема Фубини. ([3], гл. V; [6], гл. III-VI, XI, XII; [2], гл. 1-4)

2. Неопределенный интеграл Лебега и теория дифференцирования

Дифференцируемость монотонной функции почти всюду. Функции с ограниченным изменением (вариацией). Производная неопределенного интеграла Лебега. Задача восстановления функции по ее производной. Абсолютно непрерывные функции. Теорема Радона-Никодима. Интеграл Стилтьеса. ([3], гл. VI; [6], гл. VIII, IX, XIII, XVII; [2], гл. 5)

3. Пространства суммируемых функций и ортогональные ряды

Неравенства Гельдера и Минковского. Пространства L^p, их полнота. Полные и замкнутые системы функций. Ортонормированные системы в L^2 и равенство Парсеваля. Ряды по ортогональным системам; стремление к нулю коэффициентов Фурье суммируемой функции в случае равномерно ограниченной ортонормированной системы. ([3], гл. VII; [6], гл. VII)

4. Тригонометрические ряды. Преобразование Фурье

Условие сходимости ряда Фурье. Представление функций сингулярными интегралами. Единственность разложения функции в тригонометрический ряд. Преобразование Фурье интегрируемых и квадратично интегрируемых функций. Свойство единственности для преобразования Фурье. Теорема Планшереля. Преобразование Лапласа. Преобразование Фурье-Стилтьеса. ([3], гл. VIII, §§ 1-7; [6], гл. X; [7], гл. 15,16)

5. Гладкие многообразия и дифференциальные формы

Касательное пространство к многообразию в точке. Дифференциальные формы на многообразии. Внешний дифференциал. Интеграл от формы по многообразию. Формула Стокса. Основные интегральные формулы анализа. ([7], гл. 17; [9], гл. 9)

II. Теория функций комплексного переменного

1. Интегральные представления аналитических функций

Интегральная теорема Коши. Интегральная формула Коши. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля. Лемма Шварца. Интеграл типа Коши. Формулы Сохоцкого. ([12], §§ 5, 11; [5], гл. III, §§1-3.)

2. Ряды аналитических функций. Особые точки. Вычеты

Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций; теоремы Вейерштрасса. Разложение аналитических функций в ряды Тейлора и Лорана, неравенства Коши. Нули аналитических функций. Теорема единственности. Изолированные особые точки (однозначного характера). Вычеты, теорема Коши о вычетах. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Принцип аргумента. Теорема Руше. Теорема Рунге о приближении аналитических функций многочленами. ([12], §§ 6-7, 11; [5], гл. III, §§ 4-7, гл. IV, гл. V, § 4.)

3. Целые и мероморфные функции

Рост целой функции, порядок и тип. Теорема Вейерштрасса о целых функциях с заданными нулями; разложение целой функции в бесконечное произведение. Случай целых функций конечного порядка, теорема Адамара. Теорема Миттаг-Леффлера о мероморфных функциях с заданными полюсами и главными частями. ([12], §§ 14-15; [5], гл. VII, §§ 1-3.)

4. Конформные отображения

Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Принцип сохранения области. Критерий однолистности. Теорема Римана. Теоремы о соответствии границ при конформных отображениях. ([12], §§ 12-13; [5], гл. V, §§ 1-3.)

5. Аналитическое продолжение

Аналитическое продолжение и полная аналитическая функция (в смысле Вейерштрасса). Понятие Римановой поверхности. Продолжение вдоль кривой. Теорема о монодромии. Изолированные особые точки аналитических функций, точки ветвления конечного и бесконечного порядка. Принцип симметрии. Отображение многоугольников, формула Кристоффеля-Шварца. Модулярная функция. Нормальные семейства, критерий нормальности. Теорема Пикара. ([12], §§ 8-10, 13; [5], гл. VIII.)

6. Гармонические функции

Гармонические функции, их связь с аналитическими. Инвариантность гармоничности при конформной замене переменных. Бесконечная дифференцируемость. Теорема о среднем и принцип максимума. Теорема единственности. Задача Дирихле. Формула Пуассона для круга. ([12], стр. 295-304)

III. Функциональный анализ

1. Метрические и топологические пространства

Сходимость. Полнота и пополнение метрического пространства. Сепарабельность. Принцип сжимающих отображений. Компактность в метрических и топологических пространствах. ([3], гл. II.)

2. Нормированные и топологические линейные пространства

Линейные пространства. Выпуклые множества и выпуклые функционалы, теорема Хана-Банаха. Отделимость выпуклых множеств. Нормированные пространства. Критерии компактности множеств в пространствах C и L^p. Евклидовы пространства. Топологические линейные пространства. ([3], гл. III; [11], гл. IV.)

3. Линейные функционалы и линейные операторы

Непрерывные линейные функционалы. Общий вид линейных функционалов в основных функциональных пространствах. Сопряженное пространство. Слабая топология и слабая сходимость. Линейные операторы и сопряженные к ним. Пространство линейных ограниченных операторов. Компактные (вполне непрерывные) операторы. Теоремы Фредгольма. ([3], гл. IV, §§ 1-3, 5, 6; [11], гл. IV; [4], гл. VI, §1,2; [11], гл. IV; [4], гл. VI, §1,2.)

4. Гильбертовы пространства. Спектральная теория самосопряженных операторов

Изоморфизм сепарабельных бесконечномерных гильбертовых пространств. Спектральная теория ограниченных операторов в гильбертовых пространствах. Функциональное исчисление для самосопряженных операторов и спектральная теорема. Диагонализация компактных самосопряженных операторов. Неограниченные операторы. ([3], гл. III, § 4, гл. IV, § 6, гл. VII, §§ 2-3; [8], гл. VI—VIII; [10], гл. V)

5. Элементы дифференциального исчисления в линейных пространствах

Дифференцирование в линейных пространствах. Сильный и слабый дифференциалы. Производные и дифференциалы высших порядков. Экстремальные задачи для дифференцируемых функционалов. Метод Ньютона. ([3], гл. X.)

6. Обобщенные функции

Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дифференцирование, прямое произведение и свертка обобщенных функций. Обобщенные функции медленного роста; их преобразование Фурье. Преобразование Лапласа обобщенных функций (операционное исчисление). Структура обобщенных функций с компактным носителем. ([1], гл. II; [3], гл. IV, § 4, гл. VIII, § 8; [10], гл. 6, стр. 177-180.)

Список литературы

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики - М.: Наука, 1976.
2. Дьяченко М.И., Ульянов П.Л. Мера и интеграл - М., Факториал, 1998.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа - М.: Наука, 1976 (1989).
4. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа - М., Наука, 1965.
5. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Т. 1, 2 - М.: Наука, 1967-1968.
6. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной - М., Наука, 1974.
7. Никольский С.М. Курс математического анализа, Т. II - М., Наука, 1975 (1991).
8. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, Т. 1. Функциональный анализ - М., Мир, 1976
9. Рудин У. Основы математического анализа - М., Мир, 1976
10. Рудин У. Функциональный анализ - М., Мир, 1975
11. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. V - М., Физматгиз, 1959
12. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Т. 1 - М.: Наука, 1985.

ДОПОЛНЕНИЕ
к программе-минимум кандидатского экзамена по специальности
1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ

I. Анализ на дифференцируемых многообразиях

1. Дифференцируемые многообразия, их ориентируемость [4, § 2.1, § 2.7; 10, п. 12; 9].
2. Разбиение единицы [4, § 1.2; 5, § 2; 9].
3. Дифференциальные формы и операции над ними [4, § 2.6; 10, п. 14; 9].
4. Интегрирование дифференциальных форм, формула Стокса [4, § 2.9; 5, § 6; 9].
5. Комплекс де Рама, его когомологии, лемма Пуанкаре [2, §§ 1, 4; 9].
6. Когомологии Чеха, их изоморфизм когомологиям де Рама для хороших покрытий [2, §§ 8,9; 9].
7. Симплициальные комплексы, полиэдры и их группы когомологий. Формула Эйлера-Пуанкаре [3, гл. 1; 9].
8. Группы гомологий двумерных компактных поверхностей [6].
9. Потоки, их регуляризация и формула гомотопии [5, гл. 3; 9]. Гомологии потоков [5, §§ 18-21; 9].
10. Теорема двойственности де Рама [5, § 22; 9].

II. Анализ на комплексных аналитических многообразиях

1. Элементарные свойства голоморфных функций многих комплексных переменных [10, § 2; 7, §§ 2.1-2.3],
2. Кратные степенные ряды, сопряженные радиусы сходимости. Ряды Гартогса [10, § 3; 7, § 2.4].
3. Фундаментальная теорема Гартогса [10, § 2].
4. Голоморфные отображения, принцип максимума модуля и лемма Шварца для них [10, § 4].
5. Биголоморфные отображения, автоморфизмы шара, поликруга. Небиголоморфность шара и поликруга, пример Фату [10, § 4].
6. Интегральные представления Бохнера-Мартинелли и Коши-Фантаппье [10, п. 2.9; 11, гл. 1].
7. Формула Бергмана-Вейля [10, п. 3.0; 1, § 9].
8. Теоремы Гартогса и Севери (Гартогса-Бохнера) об аналитическом продолжении [10, § 11; 11, гл. 2].
9. Области голоморфности, голоморфная выпуклость и принцип непрерывности. Многообразия Штейна [10, § 12].
10. Мероморфные функции, проблемы Кузена, их связь с $\bar\partial$-проблемой. Пример неразрешимой первой проблемы Кузена [10, § 15].

11. Решение проблемы Кузена для поликруга [10, § 16].
12. Теорема Дольбо [10, § 16].
13. Подготовительная теорема Вейерштрасса и теорема о делении [10, § 8].
14. Аналитические множества, их простейшие свойства [10, § 8].
15. Кратность голоморфного отображения. Многомерные аналоги логарифмического вычета, принцип Руше [1, § 2; 10, п. 55].
16. Локальный вычет, формула преобразования, применение к доказательству теоремы Безу [8, §§ 5.1-5.5, § 19.1].
17. Форма-вычет, класс-вычет, формула вычета Лере [8, §§ 16.1-16.4].

Список литературы

1. Айзенберг Л.А., Южаков А.П. Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе - Новосибирск: Наука, 1979.
2. Ботт Р., Ту Л.В. Дифференциальные формы в алгебраической топологии - М.: Наука, 1989.
3. Понтрягин Л.С. Основы комбинаторной топологии - М.: Наука, 1976.
4. Нарасимхан Р. Анализ на действительных и комплексных многообразиях - М.: Наука, 1971.
5. де Рам Ж. Дифференцируемые многообразия - М.: Иностр. лит., 1956.
6. Телеман К. Элементы топологии и дифференцируемые многообразия - М.: Мир, 1971.
7. Хёрмандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных - М.: Мир, 1968.
8. Tsikh A.K. Multidimensional residues and their applications - AMS. 1992. V. 103.
9. Цих А.К. Лекции по кратному интегрированию (рукопись) - 1996.
10. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ - М.: Наука, 1985. Т. 2.
11. Kytmanov A.M. The Bochner-Martinelli integral and its applications - Birkhauser Verlag, 1995.

Разработчик

Заведующий кафедрой теории функций,
д. ф.-м. наук, профессор А. Цих Цих А.К