На правах рукописи

Павлюк Инесса Ивановна

СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА СЕМЕЙСТВ ТЕОРИЙ ГРУПП

1.1.5 — Математическая логика, алгебра, теория чисели дискретная математика

(физико-математические науки)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Красноярск – 2025

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный технический университет»

Научный руководитель:
д-р физ.-мат. наук, профессор **Кулпешов Бейбут**

Официальные оппоненты:
Степанова Алена Андреевна, д-р физ.-мат. наук, доцент,
ФГАОУ ВО «Дальневосточный федеральный университет»,
Департамент математики Института математики
и компьютерных технологий, профессор

Поляков Николай Львович, канд. физ.-мат. наук,
ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет
Высшая школа экономики», Факультет экономических наук,
Департамент математики, доцент

Ведущая организация:
ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет»

Защита состоится «18» декабря 2025 года в 13:30 на заседании диссертационного совета 24.2.404.14 при ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79/10, ауд. Р-806.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» https://sfu.ru/ru/science/sci-attestation/dissertations

Автореферат разослан «___» __________________ 2025 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Кравцова Ольга Вадимовна

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В современной теории моделей, наряду с изучением синтаксиса и семантики данных логических систем, включая конкретные элементарные теории и их модели, актуальным является изучение различных семейств элементарных теорий, взаимосвязей теорий в рамках данных семейств, видов аппроксимаций, а также построение теорий и их моделей на основе этих аппроксимаций. Основы для изучения аппроксимаций теорий положены в работе Дж. Акса[1], определившего понятие псевдоконечного поля, т.е. поля, аппроксимируемого конечными полями. Теория псевдоконечных структур получила дальнейшее широкое развитие в ряде работ известных специалистов. З. Шатзидакис, Л. ван ден Дрис, А. Макинтайр изучили определимые множества над конечными полями и получили их мощностные оценки [2]. Р. Элвес, Э. Жалиго, Д. Макферсон, М. Райтен изучили свойства групп в псевдопростых и псевдоконечных теориях [3] [4]. Э. Хрушовский, Ф. Вагнер, Д. Гарсиа, Д. Макферсон, Ч. Стейнхорн исследовали понятие псевдоконечной размерности [5] [6]. А. Улд Хусин, Ф. Пуан описали альтернативы в псевдоконечных группах [7]. Е. Розен [8] и Ю. Вяанянен [9] систематизировали результаты по общей теории псевдоконечности. А.А. Степанова, Е.Л. Ефремов, С.Г. Чеканов изучили и описали свойства некоторых псевдоконечных полигонов [10] [11].

Структурная теория для семейств полных и неполных элементарных теорий в общем виде развита в работах Б.Ш. Кулпешова, Н.Д. Мархабатова, С.В. Судоплатова: описаны свойства рангов для семейств сильно минимальных теорий относительно различных сигнатур [12], топологии, ранги и замыкания для се-

[1] *Ax J.* The Elementary Theory of Finite Fields // Annals of Mathematics. — 1968. — Vol. 88, No. 2. — P. 239–271.

[2] *Chatzidakis Z., van den Dries L., Macintyre A.* Definable sets over finite fields // J. Reine Angew. Math. — 1992. — Vol. 427. — P. -107-135.

[3] *Elwes R., Jaligot E., Macpherson D., Ryten M.* Groups in supersimple and pseudofinite theories // Proc. Lond. Math. Soc. — 2011. — Vol. 103, No. 3. — P. 1049–1082.

[4] *Macpherson D.* Model theory of finite and pseudofinite groups // Arch. Math. Logic. — 2018. — Vol. 57. — P. 159–184.

[5] *Hrushovski E., Wagner F.* Counting and dimensions // Model Theory with Applications to Algebra and Analysis, Vol. 2 (Eds. Z. Chatzidakis, H.D. Macpherson, A. Pillay, A.J. Wilkie, Cambridge University Press, Cambridge, 2008. — P. 161–176.

[6] *Garcia D., Macpherson D., Steinhorn C.* Pseudofinite structures and simplicity // Journal of Mathematical Logic. — 2015. — Vol. 15, No. 1, 1550002. — 41 pp.

[7] *Ould Houcine A., Point F.* Alternatives for pseudofinite groups // J. Group Theory. — 2013. — Vol. 16. — P. 461–495.

[8] *Rosen E.* Some Aspects of Model Theory and Finite Structures // The Bulletin of Symbolic Logic. — 2002. — Vol. 8, No. 3. — P. 380–403.

[9] *Väänänen J.* Pseudo-finite model theory // Matematica Contemporanea. — 2003. — Vol. 24. — P. 169–183.

[10] *Stepanova A. A., Efremov E. L., Chekanov S. G.* Pseudofinite S-acts // Сиб. электрон. матем. изв. — 2024. — Т. 21, No. 1. — С. 271–276.

[11] *Ефремов Е. Л., Степанова А. А., Чеканов С. Г.* Связные псевдоконечные унары // Алгебра и логика. — 2024. — Т. 63, № 3. — С. 280–292.

[12] *Kulpeshov B. Sh., Sudoplatov S. V.* Properties of ranks for families of strongly minimal theories // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2022. — Vol. 19, No. 1. — P. 120–124.

мейств полных и неполных теорий [13] [14], аппроксимации теорий [15], ранги для семейств теорий и их спектры [16].

Актуальным является расширение и приложение общей проблематики об аппроксимациях структур и элементарных теорий к различным естественным классам. Получение и описание новых структурных свойств для семейств элементарных теорий необходимо для классификации семантических и синтаксических объектов. В настоящей работе общая структурная теория адаптируется и развивается применительно к классам коммутативных и некоммутативных групп и их элементарных теорий. Для исследования рассматриваются задачи описания рангов и аппроксимаций для семейств теорий абелевых групп, характеристик алгебраических и определимых замыканий, а также жесткости для теорий абелевых групп, характеризации псевдо-счетной категоричности, псевдо-сильной минимальности и аритизируемости для теорий групп.

Классы абелевых групп и их элементарные теории широко известны, достаточно богаты и продуктивны как в теории классификаций, так и в приложениях [17] [18] [19]. Классификация элементарных теорий абелевых групп основана на шмелевских инвариантах [20] [21] [22], позволяющих определять абелевы группы с точностью до элементарной эквивалентности со стандартными представлениями, построенными как прямые суммы циклических, квазициклических групп и абелевых групп без кручения. Эти инварианты играют важную роль в доказательстве разрешимости теории класса абелевых групп [18]. Они приводят к эффективному управлению замыканиями семейств теорий абелевых групп, для подсчета рангов этих семейств, для характеризации аппроксимируемости над заданными семействами.

Цель работы. Целью данной работы является: описание характеристик, взаимосвязей и аппроксимаций теорий групп, а также смежных с ними теорий, в рамках данных семейств теорий, включая описание рангов, структурных свойств и замыканий для этих семейств.

Научная новизна. Все основные результаты являются новыми, снабжены полными доказательствами и своевременно опубликованы в ведущих рецензируемых журналах. Они могут быть использованы в дальнейших исследованиях

[13] *Мархабатов Н. Д., Судоплатов С. В.* Топологии, ранги и замыкания для семейств теорий. I // Алгебра и логика. — 2020. — Т. 59, No 6. — С. 649–679.

[14] *Мархабатов Н. Д., Судоплатов С. В.* Топологии, ранги и замыкания для семейств теорий. II // Алгебра и логика. — 2021. — Т. 60, No 1. — С. 57–80.

[15] *Sudoplatov S. V.* Approximations of theories // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2020. — Vol. 17. — P. 715–725.

[16] *Sudoplatov S. V.* Ranks for families of theories and their spectra // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2021. — Vol. 42, No. 12. — P. 2959–2968.

[17] *Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.* Основы теории групп. — М.: Наука, 1982. — 288 с.

[18] *Fuchs L.* Infinite Abelian groups. Volume I, New York, London : Academic Press, 1970, 289 p.

[19] *Fuchs L.* Infinite Abelian groups. Volume II, New York, London, Academic Press, 1973, 364 p.

[20] *Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.* Математическая логика. — М. : Физматлит, 2011. — 356 с.

[21] *Eklof P. C., Fischer E. R.* The elementary theory of Abelian groups // Annals of Mathematical Logic. — 1972. — Vol. 4. — P. 115–171.

[22] *Szmielew W.* Elementary properties of Abelian groups // Fundamenta Mathematicae. — 1955. — Vol. 41. — P. 203–271.

по теоретико-модельной алгебре, при чтении спецкурсов по теории моделей и теории групп, написании учебных пособий и монографий.

Методология и методы исследования. Для достижения поставленной цели исследования используются методы теории моделей и теоретико-модельной алгебры, основанные на использовании классических и новых понятий общей теории моделей, а также алгебраические, включая групповые и топологические методы.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Описаны аппроксимации и значения рангов для семейств теорий абелевых групп. В терминах шмелевских инвариантов охарактеризовано условие псевдоконечности теорий абелевых групп. Получена классификация свойств семейств теорий абелевых групп, с указанием их характеристик в терминах рангов и шмелевских инвариантов.

Результаты получены совместно с С.В. Судоплатовым и опубликованы в работах [4]–[7]. С.В. Судоплатов в работе [4] определил классы абелевых групп с заданными положительными значениями шмелевских инвариантов и указал их содержание. На основе этого анализа автором были описаны замыкания данных классов и получено описание e-спектров, представленное в теоремах 1.7.1, 1.7.3, 1.7.4. С.В. Судоплатов в работе [5] провел анализ предельных переходов для шмелевских инвариантов и подсчетов рангов. С помощью этого анализа автором были доказаны теоремы 1.3.2, 1.4.6, 1.5.6. Кроме того, в этой работе автором представлено доказательство теорем 1.8.2 и 1.8.4. С.В. Судоплатов в работе [6] предложил подходы к получению аппроксимаций теорий абелевых групп. С помощью этих подходов автором была доказана теорема 1.6.1, а затем получены совместные следствия для конкретных семейств теорий. С.В. Судоплатовым в работе [7] доказаны леммы о значениях рангов семейств теорий абелевых групп. С помощью этих утверждений автором доказаны теоремы 1.9.5 и 1.10.3.

2. Описаны возможности алгебраических и определимых замыканий для абелевых групп. Доказано, что имеет место трихотомия для степеней алгебраизации. Установлена дихотомия значений разности между алгебраическими замыканиями и определимыми замыканиями для абелевых групп, определяемых шмелевскими инвариантами для циклических частей. Описаны степени жесткости для стандартных абелевых групп.

Результаты о степенях алгебраизации получены автором лично и опубликованы в работе [10], включая теоремы 2.4.7 и 2.4.8. Основная теорема 2.7.4 о степенях жесткости стандартных абелевых групп доказана путем рассмотрения структуры конечных абелевых групп, которое проведено С.В. Судоплатовым, и бесконечных абелевых групп, которое проведено лично автором, и опубликована в совместной работе [9].

3. Описаны аппроксимации, замыкания и ранги для семейств счетно категоричных и сильно минимальных теорий, в частности, для счетно категоричных и сильно минимальных теорий групп.

Результаты об аппроксимируемости счетно категоричными и сильно минимальными теориями получены совместно с Б.Ш. Кулпешовым и С.В. Судоплатовым, которым принадлежит постановка задачи и результаты об упорядоченных псевдо-счетно категоричных и псевдо-сильно-минимальных теориях. Теоремы 3.1.2, 3.1.3, 3.1.7, 3.3.1 о сигнатурных возможностях предельных переходов для счетно категоричных и сильно минимальных теорий, а также теоремы 3.2.2, 3.2.4, 3.4.2 о шмелевских инвариантах и строении моделей псевдо-счетно категоричных и псевдо-сильно-минимальных теорий групп и модулей доказаны лично автором и опубликованы в совместных работах [1]–[3].

4. Изучены приложения общего подхода для арностей и аритизируемостей теорий к теориям групп и моноидов. Доказано, что теория группы G аритизируема тогда и только тогда, когда группа G конечна. Показано, что для моноидов и группоидов этот критерий не выполняется: существует бесконечный моноид, имеющий бинарную теорию.

Результаты получены в соавторстве с С.В. Судоплатовым, которому принадлежит идея адаптации общего подхода исследования аритизируемости к функциональным сигнатурам и характеризация аритизируемости. Основные теоремы 4.2.3 и 4.2.4 об аритизируемости групп доказаны лично автором и опубликованы в совместной работе [8].

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- 11 Panhellenic Logic Symposium, Дельфы, Греция, 2017 (очно);
- 14-я, 15-я, 16-я международные летние школы-конференции «Пограничные вопросы теории моделей и универсальной алгебры», Эрлагол, 2021 (дистанционно), 2023, 2024 (очно);
- 6 World Congress and school on universal logic, Виши, Франция, 2018 (очно);
- 16 International congress on logic, methodology and philosophy of science and technology (CLMPST), Прага, Чехия, 2019 (очно);
- Logic Colloquium, Прага, Чехия, 2019 (очно); Познань, Польша, 2021 (дистанционно);
- Традиционная международная конференция «Мальцевские чтения», Новосибирск, 2020, 2021 (дистанционно), 2023, 2024 (очно);
- Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, Алматы, Казахстан, 2021, 2024 (дистанционно);
- 8-я Всероссийская конференция «Синтаксис и семантика логических систем», Аршан, 2024 (очно);
- Семинар «Теория моделей имени Е.А. Палютина» ИМ СО РАН, 2022 (очно).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 28 печатных изданиях, 10 из которых изданы в рекомендованных ВАК рецензируемых научных журналах, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук, а также индексируемых в наукометрической системе «Белый список» [1]–[10], 18 — в сборниках статей трудов конференций и тезисах докладов [11]–[29].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 91 страницу машинописного текста. Библиография содержит 90 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований семейств теорий групп, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, излагается научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

В **первой главе** рассматривается ранг семейства теорий, подобный рангу Морли, который может служить мерой сложности или богатства данного семейства. Увеличением ранга посредством расширения семейств получаются более богатые семейства, которые в случае достижения рангом бесконечности могут рассматриваться как «достаточно богатые». В данной главе реализуются ранги для семейств теорий абелевых групп. В частности, изучаются ранги и замыкания для семейств теорий конечных абелевых групп. Показано, что множество теорий конечных абелевых групп не является тотально трансцендентным, т.е. его ранг равен бесконечности. В терминах шмелевских инвариантов характеризуются псевдоконечные абелевы группы. Кроме того, характеризуются e-минимальные семейства теорий абелевых групп как на языке размерности, т.е. числа независимых пределов шмелевских инвариантов, так и в терминах неравенств для шмелевских инвариантов. Эти характеризации получены для конечных абелевых групп и в общем случае. Найдены характеризации аппроксимируемости теорий абелевых групп и показаны возможности подсчета шмелевских инвариантов через параметры аппроксимаций. Описаны возможности построения d-определимых семейств теорий абелевых групп, имеющих данный счетный ранг и данную степень. Рассмотрены формулы первого порядка, которые отражают информацию о семантических и синтаксических свойствах. Адаптированы общие подходы, описывающие связи между формулами и свойствами, для семейств абелевых групп и их теорий, определяющие возможности характеристик формул и свойств, включая значения рангов. Эта адаптация основана на позитивно примитивных формулах, сводящих каждую формулу к подходящей булевой комбинации формул, определяющих шмелевские инварианты для теорий абелевых групп. На основе этой базируемости описана трихотомия возможностей значений ранга для предложений, определяющих окрестности для множества теорий абелевых групп: ранг может быть равен -1, 0 или ∞. Тем самым, окрестности либо конечны, либо содержат континуальное число теорий. С помощью трихотомии установлено, что каждое предложение, определяющее окрестность, либо принадлежит конечному множеству его теорий, либо является генерическим. Также введено понятие богатого свойства и обобщены основные результаты для таких свойств.

Для того чтобы сформулировать основные результаты первой главы, приведем необходимые понятия и обозначения.

Пусть $\mathcal{A}$ — абелева группа сигнатуры $\Sigma = \langle +^{(2)}, -^{(1)}, 0^{(0)} \rangle$. Для натурального k через $k\mathcal{A}$ обозначается ее подгруппа с носителем $\{ka \mid a \in A\}$, через $\mathcal{A}[k]$ — подгруппа с носителем $\{a \in A \mid ka = 0\}$, через $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел. Если $p \in \mathbb{P}$, т.е. если p — простое число и $pA = \{0\}$, то через $\dim\mathcal{A}$ обозначается размерность группы $\mathcal{A}$, рассматриваемой как векторное пространство над полем из p элементов. Следующие числа для произвольных p и n (p — простое, n — натуральное) называются инвариантами Шмелевой для группы $\mathcal{A}$ [23] [24]:

$$\alpha_{p,n}(\mathcal{A}) = \min\{\dim((p^n\mathcal{A})[p]/(p^{n+1}\mathcal{A})[p]), \omega\},$$

$$\beta_p(\mathcal{A}) = \min\{\inf\{\dim((p^n\mathcal{A})[p] \mid n \in \omega\}, \omega\},$$

$$\gamma_p(\mathcal{A}) = \min\{\inf\{\dim((\mathcal{A}/\mathcal{A}[p^n])/p(\mathcal{A}/\mathcal{A}[p^n])) \mid n \in \omega\}, \omega\},$$

$$\varepsilon(\mathcal{A}) \in \{0, 1\}, \ \text{ и } \varepsilon(\mathcal{A}) = 0 \Leftrightarrow (n\mathcal{A} = \{0\} \,\text{для некоторого}\, n \in \omega, n \neq 0).$$

Из совпадения теорий абелевых групп, имеющих одинаковые инварианты Шмелевой, вытекает, что любая абелева группа $\mathcal{A}$ элементарно эквивалентна группе

$$\oplus_{p,n}\mathbb{Z}_{p^n}^{(\alpha_{p,n})} \oplus \oplus_p \mathbb{Z}_{p^\infty}^{(\beta_p)} \oplus \oplus_p R_p^{(\gamma_p)} \oplus \mathbb{Q}^{(\varepsilon)},$$

где $\mathcal{B}^{(k)}$ означает прямую сумму k подгрупп, изоморфных группе $\mathcal{B}$. Таким образом, теория любой абелевой группы имеет в качестве своей модели некоторую прямую сумму базисных групп. Группы такого вида называются *группами Шмелевой* или *стандартными* группами.

Для множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел обозначим через **Szm** множество $\{\alpha_{p,n} \mid p \in \mathbb{P}, n \in \omega \setminus \{0\}\} \cup \{\beta_p \mid p \in \mathbb{P}\} \cup \{\gamma_p \mid p \in \mathbb{P}\} \cup \{\varepsilon\}$ всех шмелевских инвариантов теорий абелевых групп.

Обозначим через $\mathcal{T}_A$ (соответственно $\mathcal{T}_{A,\text{fin}}$) множество всех полных теорий (конечных) абелевых групп, и рассмотрим множество всех псевдоконечных теорий абелевых групп, т.е. множество $\mathcal{T}_{A,\text{pf}} = \text{Cl}_E(\mathcal{T}_{A,\text{fin}}) \setminus \mathcal{T}_{A,\text{fin}}$.

Согласно [*Sudoplatov S. V.* Ranks for families of theories and their spectra // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2021. — Vol. 42, No. 12. — P. 2959–2968.] определим *ранг* $\text{RS}(\cdot)$ для семейств полных теорий данной сигнатуры, аналогичный рангу Морли, а также иерархию семейств относительно этих рангов.

Для пустого семейства $\mathcal{T}$ положим $\text{RS}(\mathcal{T}) = -1$, для конечных непустых семейств $\mathcal{T}$ — $\text{RS}(\mathcal{T}) = 0$ и для бесконечных семейств $\mathcal{T}$ — $\text{RS}(\mathcal{T}) \geq 1$.

Для семейства $\mathcal{T}$ и ординала $\alpha = \beta + 1$ положим $\text{RS}(\mathcal{T}) \geq \alpha$, если существуют попарно несовместные $\Sigma(\mathcal{T})$-предложения φ_n, $n \in \omega$, такие, что $\text{RS}(\mathcal{T}_{\varphi_n}) \geq \beta$, $n \in \omega$.

Если α — предельный ординал, то $\text{RS}(\mathcal{T}) \geq \alpha$, если $\text{RS}(\mathcal{T}) \geq \beta$ для любого $\beta < \alpha$.

Положим $\text{RS}(\mathcal{T}) = \alpha$, если $\text{RS}(\mathcal{T}) \geq \alpha$ и $\text{RS}(\mathcal{T}) \not\geq \alpha + 1$.

[23] *Szmielew W.* Elementary properties of Abelian groups // Fundamenta Mathematicae. — 1955. — Vol. 41. — P. 203–271.

[24] *Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.* Математическая логика. — М. : Физматлит, 2011. — 356 с.

Если $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) \geq \alpha$ для любого α, то полагаем $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) = \infty$.

Семейство $\mathcal{T}$ называется *e-тотально трансцендентным*, или *тотально трансцендентным*, если $\mathrm{RS}(\mathcal{T})$ является ординалом.

Если $\mathcal{T}$ является тотально трансцендентным, с $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) = \alpha \geq 0$, то определим *степень* $\mathrm{ds}(\mathcal{T})$ семейства $\mathcal{T}$ как максимальное число попарно несовместных предложений φ_i таких, что $\mathrm{RS}(\mathcal{T}_{\varphi_i}) = \alpha$.

Приведем некоторые основные результаты первой главы.

Теорема 1.3.2. *Для любой теории T абелевых групп следующие условия эквивалентны:*

1) $T \in \mathcal{T}_{A,\mathrm{pf}}$*;*

2) *теория T имеет некоторое бесконечное значение $\alpha_{p,n}$, или некоторое равенство $\beta_p = \gamma_p = \omega$, или $\varepsilon = 1$, причем для всех ненулевых значений β_p и γ_p имеет место $\beta_p = \gamma_p = \omega$;*

3) *теория T имеет бесконечные модели и все ненулевые значения β_p и γ_p влекут равенства $\beta_p = \gamma_p = \omega$.*

Теорема 1.4.6. *Если $\mathcal{T}$ — бесконечное семейство теорий абелевых групп, и $T \notin \mathcal{T}$ — теория абелевой группы, то $T \in \mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})$ тогда и только тогда, когда T имеет бесконечные модели (т. е. T имеет некоторые бесконечные $\alpha_{p,n}$ или некоторые положительные β_p, γ_p, ε) и локально соответствует $\mathcal{T}$.*

Теорема 1.5.6. *Для любой теории T абелевой группы $\mathcal{A}$ следующие условия эквивалентны:*

1) *теория T аппроксимируется некоторым семейством теорий;*

2) *теория T аппроксимируется некоторым e-минимальным семейством;*

3) *группа $\mathcal{A}$ бесконечна.*

Теорема 1.6.1. *Для любого бесконечного семейства $\mathcal{T} \dot\cup \{T\}$ теорий абелевых групп следующие условия эквивалентны:*

1) *T является $\mathcal{T}$-аппроксимируемым;*

2) *T имеет бесконечную модель, и для любого конечного набора шмелевских инвариантов ξ для T существует бесконечно много теорий $T_k \in \mathcal{T}$, $k \in \omega$, таких, что каждая ξ либо совпадает для всех T_k и для T, либо ξ для T является пределом соответствующих шмелевских инвариантов для T_n (либо с тем же именем ξ, либо как предел для $\alpha_{p,n}^{T_k}$).*

Теорема 1.7.1. *Для любого $\lambda \in \omega \cup \{\omega, 2^\omega\}$ существует E-комбинация T теорий конечных абелевых групп (в $\mathbf{A} \cap \mathcal{F}$ и с наименьшим порождающим множеством), для которой $e\text{-}\mathrm{Sp}(T) = \lambda$.*

Теорема 1.7.3. *Для любого $\lambda \in \omega \cup \{\omega, 2^\omega\}$ существует E-комбинация T теорий из* **ВЕ** *(соответственно,* **ГЕ***,* **АГЕ***,* **ВГЕ***, $\mathcal{T}_A$) и с наименьшим порождающим множеством, так что при этом $e\text{-}\mathrm{Sp}(T) = \lambda$.*

Теорема 1.7.4. *Существует 2^ω семейств $\mathrm{Cl}_E(\mathbf{ВЕ})_D$ (соответственно, $\mathrm{Cl}_E(\mathbf{ГЕ})_D$, $\mathrm{Cl}_E(\mathbf{АГЕ})_D$, $\mathrm{Cl}_E(\mathbf{ВГЕ})_D$, $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}_A)_D$), у которых E-замыкания не имеют наименьших порождающих множеств и у которых E-комбинации T удовлетворяют равенству $e\text{-}\mathrm{Sp}(T) = 2^\omega$.*

Теорема 1.8.2. *Пусть* α *— не более чем счетный ординал,* $n \in \omega \setminus \{0\}$*. Тогда существует d-определимое подсемейство* $(\mathcal{T}_A)_\Phi$ *такое, что* $\mathrm{RS}((\mathcal{T}_A)_\Phi) = \alpha$ *и* $\mathrm{ds}((\mathcal{T}_A)_\Phi) = n$.

Теорема 1.8.4. *Пусть* α *— не более чем счетный ординал,* $n \in \omega \setminus \{0\}$*. Тогда существует подсемейство* $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_{A,\mathrm{fin}}$ *такое, что* $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) = \alpha$, $\mathrm{ds}(\mathcal{T}) = n$ *и* $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}_{A,\mathrm{fin}} \cup \mathcal{T}_{A,\mathrm{pf}}$ *является d-определимым семейством с условием* $(\mathrm{RS}(\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})), \mathrm{ds}(\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})) = (\alpha, n)$.

Теорема 1.9.5. *Для любого предложения* $\varphi \in \mathrm{Sent}(\Sigma_0)$ *и* $P = \mathcal{T}_A$ *либо* P_φ *E-замкнуто и конечно, либо* P_φ *E-замкнуто с* $|P_\varphi| = 2^\omega$.

Теорема 1.10.3. *Для любого предложения* $\varphi \in \mathrm{Sent}(\Sigma_0)$ *и богатого* $P \subseteq \mathcal{T}_A$ *имеют место следующие возможности:*

1) $\mathrm{RS}_P(\varphi) = -1$, *если* φ $\mathcal{T}_A$*-несовместно;*

2) $\mathrm{RS}_P(\varphi) = 0$, *если* φ $\mathcal{T}_A$*-совместно и принадлежит (в конечном количестве) теориям из* $\mathcal{T}_A$*, имеющим только конечные модели;*

3) $\mathrm{RS}_P(\varphi) = \infty$, *если* φ *принадлежит теории* $T \in \mathcal{T}_A$*, имеющей бесконечную модель.*

Во **второй главе** показано, что при классификации абелевых групп и их элементарных теорий возникает ряд характеристик, описывающих те или иные особенности рассматриваемых объектов. Среди этих характеристик особую роль играют шмелевские инварианты, задающие возможности делимости элементов, порядков элементов, размерности подгрупп, и позволяющие описывать данные абелевы группы с точностью до элементарной эквивалентности. Тем самым в терминах шмелевских инвариантов представляются синтаксические свойства абелевых групп, т.е. свойства, зависящие лишь от их элементарных теорий. В работе на базе шмелевских инвариантов приведено описание поведения операторов алгебраического и определимого замыканий на основе двух характеристик: степеней алгебраизации и разницы между алгебраическими и определимыми замыканиями. Тем самым изучены и описаны возможности для алгебраических и определимых замыканий, адаптированные к теориям абелевых групп. Доказана теорема о трихотомии для степеней алгебраизации: либо эта степень минимальная, если в стандартных моделях кроме единственной двухэлементной группы нет положительно конечного числа циклических и квазициклических частей, либо степень положительная и натуральная, если в стандартной модели нет положительного конечного числа циклических и квазициклических частей, кроме единственной копии двухэлеметной группы и некоторой конечной прямой суммы конечных циклических частей, и степень бесконечна, если стандартная модель содержит неограниченное число неизоморфных конечных циклических частей или положительное конечное число копий квазиконечных частей. Кроме того установлена дихотомия значений разности между алгебраическими замыканиями и определимыми замыканиями для абелевых групп, определяемых шмелевскими инвариантами для циклических частей. В частности, показано, что абелевы группы без кручения квазиурбаниковы, т.е. имеют совпадение алгебраического и определимого замыкания. Описаны степени жесткости для стандартных абелевых групп.

Для того чтобы сформулировать основные результаты второй главы, приведем необходимые понятия и обозначения.

Для множества A теории T объединение множеств решений формул $\varphi(x,\overline{a})$, $\overline{a} \in A$, таких что $\models \exists^{\leq n} x\ \varphi(x,\overline{a})$ для некоторого $n \in \omega$ (соответственно $\models \exists^{=1} x\ \varphi(x,\overline{a})$) называется *алгебраическим* (*определимым* или *дефинициональным*) *замыканием* множества A. Алгебраическое замыкание для A обозначается через $\mathrm{acl}(A)$, а его определимое (дефинициональное) замыкание через $\mathrm{dcl}(A)$.

Для $n \in \omega \setminus \{0\}$ и множества A элемент b называется *n-алгебраическим* над A, если $b \in \mathrm{acl}(A)$ и это свидетельствуется формулой $\varphi(x,\overline{a})$, для $\overline{a} \in A$, имеющей не более n решений.

Множество всех n-алгебраических элементов над A обозначается через $\mathrm{acl}_n(A)$.

Если $\mathrm{acl}(A) = \mathrm{acl}_n(A)$, то минимальное такое n называется *степенью алгебраизации* над множеством A и обозначается через $\deg_{\mathrm{acl}}(A)$. Если такого n не существует, то полагаем $\deg_{\mathrm{acl}}(A) = \infty$. Супремум значений $\deg_{\mathrm{acl}}(A)$ по всем множествам A данной теории T обозначается $\deg_{\mathrm{acl}}(T)$ и называется *степенью алгебраизации* теории T.

Приведем некоторые основные результаты второй главы.

Теорема 2.4.7. *Для любой теории T абелевой группы $\mathcal{A}$ выполняется ровно одно из следующих условий:*

1) $\deg_{\mathrm{acl}}(T) = 1$, *если $\beta_p \in \{0,\omega\}$ для любых p, $\alpha_{p,n} \in \{0,\omega\}$ для любых $(p,n) \neq (2,1)$ и $\alpha_{2,1} \in \{0,1,\omega\}$;*

2) $\deg_{\mathrm{acl}}(T) \in \omega \setminus \{0,1\}$, *если $\beta_p \in \{0,\omega\}$ для любого p, некоторый положительный $\alpha_{p,n}$ конечен помимо возможности $\alpha_{2,1} = 1$, и существует конечное число натуральных положительных $\alpha_{p,n}$;*

3) $\deg_{\mathrm{acl}}(T) = \infty$, *если значения p или n для натуральных $\alpha_{p,n} > 0$ не ограничены, или $\beta_p \in \omega \setminus \{0\}$ для некоторого p.*

Теорема 2.4.8. *Для любой абелевой группы $\mathcal{A}$ и ее теории T либо* acl-$\mathrm{dcl}_{\mathrm{dif}}(T)$ *конечно, если $\mathcal{A}$ конечна или все $\alpha_{p,n} \in \{0,\omega\}$, за исключением, может быть, $\alpha_{2,1} = 1$ и $\beta_p \in \{0,\omega\}$, либо* acl-$\mathrm{dcl}_{\mathrm{dif}}(T) = \infty$ *в противном случае, т.е. если $\mathcal{A}$ бесконечна и существуют положительные $\alpha_{p,n} \in \omega$ или $\beta_p \in \omega$ помимо $\alpha_{2,1} = 1$.*

Теорема 2.7.4. *Для любой стандартной бесконечной абелевой группы $\mathcal{A}$ выполняется одно из следующих условий:*

1) $\deg_4(\mathcal{A}) = (1,1,2,2)$, *если* $\mathrm{rk}(\mathcal{A}) = 1$*;*

2) $\deg_4(\mathcal{A}) = (1,1,3,3)$, *если* $\mathrm{rk}(\mathcal{A}) = 2$ *и имеется свободный элемент порядка 2 для циклической части $\mathcal{A}$;*

3) $\deg_4(\mathcal{A}) = (r-1,r-1,\infty,\infty)$, *если* $\mathrm{rk}(\mathcal{A}) = r > 2$ *конечно и имеется свободный элемент порядка 2 для циклической части $\mathcal{A}$;*

4) $\deg_4(\mathcal{A}) = (r,r,\infty,\infty)$, *если* $\mathrm{rk}(\mathcal{A}) = r > 2$ *конечно и нет свободного элемента порядка 2 для циклической части $\mathcal{A}$;*

5) $\deg_4(\mathcal{A}) = (\infty,\infty,\infty,\infty)$, *если* $\mathrm{rk}(\mathcal{A})$ *бесконечно.*

В **третьей главе** описаны аппроксимации и замыкания для семейств счетно категоричных и сильно минимальных теорий, в частности, для счетно категоричных и сильно минимальных теорий групп.

Для того чтобы сформулировать основные результаты третьей главы, приведем необходимые определения.

Счетная теория T называется *счетно категоричной* или *$\aleph_0$-категоричной*, если T имеет ровно одну счетную модель, с точностью до изоморфизма.

Теория T называется *псевдо-счетно-категоричной*, если T аппроксимируется счетно категоричными теориями и при этом сама не является счетно категоричной. Модели (псевдо-)счетно категоричных теорий также называются (псевдо-)счетно категоричными.

Согласно [*Baldwin J. T., Lachlan A. H.* On strongly minimal sets // The Journal of Symbolic Logic. — 1971. — Vol. 36, No. 1. — P. 79–96.] бесконечная структура $\mathcal{M}$ называется *минимальной*, если для любой формулы $\varphi(x, \overline{a})$ языка $\mathcal{M}$ с параметрами $\overline{a}$ либо $\varphi(\mathcal{M}, \overline{a})$, либо $\neg\varphi(\mathcal{M}, \overline{a})$ конечна. Теория T без конечных моделей называется *сильно минимальной*, если любая модель $\mathcal{M} \models T$ минимальна. Модели сильно минимальной теории также называются *сильно минимальными*.

Элементарная теория T бесконечной структуры $\mathcal{M}$, которая не является сильно минимальной, называется *псевдо-сильно-минимальной*, если любое предложение, истинное в $\mathcal{M}$, имеет сильно минимальную структуру $\mathcal{N}$. В этом случае модели $\mathcal{N}$ называются *аппроксимациями* модели $\mathcal{M}$, а сама модель $\mathcal{M}$ называется *псевдо-сильно-минимальной*.

Отметим следующие основные результаты третьей главы.

Теорема 3.1.2. *Любая теория T сигнатуры Σ^1 является псевдо-$\aleph_0$-категоричной тогда и только тогда, когда T не имеет конечных моделей и не является $\aleph_0$-категоричной.*

Теорема 3.1.3. *Для любой сигнатуры Σ имеет место $\overline{\mathcal{T}}_{\rm pcc} \cap \mathcal{T}_\Sigma \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда Σ содержит хотя бы один функциональный символ местности ≥ 1 или хотя бы один предикатный символ местности ≥ 2.*

Теорема 3.1.7. *Для любой счетно категоричной теории T любое ее константное обогащение T' либо счетно категорично, если добавляется лишь конечное число попарно различных констант, либо псевдо-счетно-категорично, если добавляется бесконечное число попарно различных констант.*

Теорема 3.2.2. *Для любой полной теории T абелевых групп следующие условия эквивалентны:*

1) *теория T псевдо-счетно-категорична;*

2) *теория T имеет бесконечное число положительных значений $\alpha_{p,n}$, и при этом все положительные значения β_p и γ_p влекут $|\{n \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}| = \omega$ и $\beta_p = \gamma_p = \omega$, а равенство $\varepsilon = 1$ влечет $|\{\langle p, n\rangle \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}| = \omega$.*

Теорема 3.2.4. *Для любого счетного кольца R и счетного R-модуля $\mathcal{A}$ следующие условия эквивалентны:*

1) *$\mathcal{A}$ является псевдо-$\aleph_0$-категоричным;*

2) *существуют конечные или псевдоконечные R-модули $\mathcal{B}_i$, $i < \omega$, и кардиналы $\kappa_i \leq \omega$ такие, что $\mathcal{A} = \bigoplus\limits_{i<\omega} \mathcal{B}_i^{(\kappa_i)}$; при этом если количество нетривиальных слагаемых конечно, то некоторый R-модуль $\mathcal{B}_i$ является псевдоконечным.*

Теорема 3.3.1. *Любая теория T сигнатуры Σ^1, состоящей из константных, нульместных и одноместных предикатных символов, является псевдо-сильно-минимальной тогда и только тогда, когда T не имеет конечных моделей и не является сильно минимальной.*

Теорема 3.4.2. *Пусть G — группа. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *группа G псевдо-сильно-минимальна,*

2) *группа G абелева и имеет вид $G = \mathbb{Q}^{(\lambda)} \oplus \bigoplus\limits_{p} \mathbb{Z}_{p^\infty}^{(\beta_p)}$, где λ и β_p — некоторые кардиналы, включая хотя бы один бесконечный β_p, т.е. для теории $\mathrm{Th}(G)$ все $\alpha_{p,n} = 0$, $\beta_p \in \omega + 1$, $\gamma_p = 0$, $\varepsilon = 1$, с $\max\limits_{p} \beta_p = \omega$.*

В **четвертой главе** изучены приложения общего подхода для арностей и аритизируемостей теорий к теориям групп, моноидов и алгебр. Доказано, что теория группы G аритизируема тогда и только тогда, когда группа G конечна. Показано, что для моноидов и алгебр этот критерий не выполняется: существует бесконечный моноид, имеющий бинарную теорию.

Для того чтобы сформулировать основные результаты четвертой главы, приведем необходимые понятия и обозначения.

Элементарная теория T называется *унарной* или 1-*арной*, если любая T-формула $\varphi(\overline{x})$ T-эквивалентна некоторой булевой комбинация T-формул, каждая из которых имеет одну свободную переменную, и формул вида $x \approx y$.

Для натурального числа $n \geq 2$ формула $\varphi(\overline{x})$ теории T называется *n-арной* или *n-формулой*, если $\varphi(\overline{x})$ T-эквивалентна булевой комбинации T-формул, каждая из которых состоит из n свободных переменных.

Для натурального числа $n \geq 2$ элементарная теория T называется *n-арной* или *n-теорией*, если любая T-формула $\varphi(\overline{x})$ является n-арной.

Теория T называется *бинарной*, если T 2-арна, теория T называется *тернарной*, если T 3-арна и т. д.

Если теория T является n-арной и не является $(n-1)$-арной, то значение n называется *арностью* теории T и обозначается через $\mathrm{ar}(T)$. Если T не имеет арности, полагаем $\mathrm{ar}(T) = \infty$.

Согласно [*Sudoplatov S. V.* Arities and aritizabilities of first-order theories // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2022. — Vol. 19, No. 2. — P. 889–901.] T-формула $\varphi(\overline{x})$ называется *n-обогащаемой* или *n-аритизируемой*, если T имеет обогащение T' такое, что $\varphi(\overline{x})$ является T'-эквивалентной некоторой булевой комбинации T'-формул с n свободными переменными.

Теория T называется *n-обогащаемой* или *n-аритизируемой*, если существует n-арное обогащение T' теории T.

Теория T называется *аритизируемой*, если T является n-аритизируемой для некоторого n.

1-аритизируемая теория называется *унаризируемой*. 2-аритизируемая теория называется *бинаризируемой*, 3-аритизируемая теория называется *тернаризируемой* и т.д.

Согласно [*Sudoplatov S. V.* Almost n-ary and almost n-aritizable theories // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2023. — Vol. 20, No. 1. — P. 132–139.], теория T называется *почти n-арной*, если существует конечное число формул $\varphi_1(\overline{x}), \ldots, \varphi_m(\overline{x})$ таких, что каждая T-формула T-эквивалентна булевой комбинации n-формул и формул, полученных заменой свободных переменных в $\varphi_1(\overline{x}), \ldots, \varphi_m(\overline{x})$.

В этом случае мы говорим, что формулы $\varphi_1(\overline{x}), \ldots, \varphi_m(\overline{x})$ свидетельствуют о том, что теория T почти n-арна.

Почти 1-арные теории называются *почти унарными*, почти 2-арные теории называются *почти бинарными*, почти 3-арные теории называются *почти тернарными* и т.д.

Теория T называется *почти n-аритизируемой*, если некоторое обогащение T' теории T почти n-арно.

Почти 1-аритизируемые теории называются *почти унаризируемыми*, почти 2-аритизируемые теории называются *почти бинаризируемыми*, почти 3-аритизируемые теории называются *почти тернаризиуемыми* и т.д.

Отметим следующие основные результаты четвертой главы.

Теорема 4.2.3. *Пусть $\mathcal{G}$ — $\emptyset$-определимая группа в структуре $\mathcal{M}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *все формулы теории* $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$*, определяющие подмножества конечных декартовых степеней $\mathcal{G}$, n-аритизируемы для некоторого фиксированного натурального n, и образуют n-аритизируемую теорию* $\mathrm{Th}(\mathcal{G})$*;*

2) *все формулы* $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$*, определяющие подмножества конечных декартовых степеней $\mathcal{G}$, являются унаризируемыми и задают унаризируемую теорию* $\mathrm{Th}(\mathcal{G})$*;*

3) $\mathcal{G}$ *— конечная группа.*

Теорема 4.2.4. *Для любой группы $\mathcal{G}$ следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathrm{Th}(\mathcal{G})$ *аритизируема,*

2) $\mathrm{Th}(\mathcal{G})$ *почти n-аритизируема для некоторого n,*

3) $\mathrm{Th}(\mathcal{G})$ *унаризируема,*

4) $\mathrm{Th}(\mathcal{G})$ *почти унаризируема,*

5) $\mathrm{Th}(\mathcal{G})$ *является n-арной для некоторого n,*

6) $\mathcal{G}$ *— конечная группа.*

Тем самым получена следующая дихотомия: для любой группы $\mathcal{G}$ либо $\mathrm{ar}(\mathrm{Th}(\mathcal{G})) \in \omega$, если $\mathcal{G}$ конечна, либо $\mathrm{ar}(\mathrm{Th}(\mathcal{G})) = \infty$, если $\mathcal{G}$ бесконечна.

Заключение содержит список основных результатов, полученных в работе.

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю Кулпешову Бейбуту Шайыковичу за постановку задач, полезные обсуждения и советы. Автор благодарит Судоплатова Сергея Владимировича за предоставленную возможность проведения совместных исследований в рамках научного направления кафедры алгебры и математической логики НГТУ.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК, а также входящих в наукометрические базы:

[1] *Кулпешов Б. Ш., Павлюк И. И., Судоплатов С. В.* Ранги и аппроксимации для семейств упорядоченных теорий // Математические заметки. — 2024. — Т. 116, № 4. — С. 531–551. Перевод: *Kulpeshov B. Sh., Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V.* Ranks and approximations for families of ordered theories // Mathematical Notes. — 2024. — Vol. 116, No. 4. — P. 669–684. (ВАК, Белый список, РИНЦ, Scopus, WoS)

[2] *Kulpeshov B. Sh., Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V.* Pseudo-strongly-minimal structures and theories // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2024. — Vol. 45, No. 12. — P. 6515–6525. (Белый список, РИНЦ, Scopus, WoS)

[3] *Кулпешов Б. Ш., Павлюк И. И., Судоплатов С. В.* Псевдо-счетно-категоричные формулы и теории // Математические заметки. — 2025. — Т. 117, № 3. — С. 422–442. Перевод: *Kulpeshov B. Sh., Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V.* Pseudo-countably categorical formulae and theories // Mathematical Notes. — 2025. — Vol. 117, No. 3. — P. 442–457. (ВАК, Белый список, РИНЦ, Scopus, WoS)

[4] *Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V.* Families of theories of abelian groups and their closures // Вестник Карагандинского университета. Серия. Математика = Bulletin of the Karaganda university. Mathematics series. — 2018. — Vol. 92, No. 4. — P. 72–78. (Белый список, РИНЦ, Scopus, WoS)

[5] *Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V.* Ranks for families of theories of Abelian groups // Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. — 2019. — Vol. 28. — P. 95–112. (ВАК, Белый список, РИНЦ, Scopus, WoS)

[6] *Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V.* Approximations for Theories of Abelian Groups // Mathematics and Statistics. — 2020. — Vol. 8, No. 2. — P. 220–224. (Белый список, Scopus)

[7] *Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V.* Formulas and properties for families of theories of Abelian Groups // Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. — 2021. — Vol. 36. — P. 95–109. (ВАК, Белый список, РИНЦ, Scopus, WoS)

[8] *Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V.* Arities and aritizabilities of group, monoid and groupoid theories // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2022. — Vol. 43, No. 3. — P. 682–686. (Белый список, РИНЦ, Scopus, WoS)

[9] *Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V.* Variations of rigidity for abelian groups // Mathematics and Statistics. — 2024. — Vol. 12, No. 2. — P. 204–210. (Белый список, Scopus)

[10] *Pavlyuk In. I.* On Algebraic and Definable Closures for Theories of Abelian Groups = Об алгебраических и определимых замыканиях для теорий абелевых групп // Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. — 2024. — Vol. 47. — P. 107–118. (ВАК, Белый список, РИНЦ, Scopus, WoS)

Другие публикации:

[11] *Kulpeshov B. Sh., Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V.* On pseudo-strongly-minimal formulae, structures and theories // Model Theory and Algebra 2024: Collection of papers / Edited by M. Shahryari, S. V. Sudoplatov. — Novosibirsk: NSTU Publisher, 2024. — P. 42–47. (РИНЦ)

[12] *Kulpeshov B. Sh., Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V.* On a criterion of total transcendency for families of ordered theories // Мальцевские чтения = Mal'tsev meeting : тез. докл. междунар. конф., Новосибирск, 20–24 сент. 2021 г. — Новосибирск, 2021. — С. 152.

[13] *Kulpeshov B. Sh., Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V.* On pseudo-countably categorical formulae and theories // Синтаксис и семантика логических систем : материалы 8-й Всероссийской конференции, посвященной памяти И. К. Шаранхаева. Аршан, Республика Бурятия, 20–24 августа 2024 г. / ФГБОУ ВО «ИГУ», ИМИТ ; редкол.: Н. А. Перязев, С. Ф. Винокуров, В. И. Пантелеев. — Иркутск : Издательство ИГУ, 2024. — С. 51–55.

[14] *Kulpeshov B. Sh., Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V.* On approximations by strongly minimal theories // Международная конференция «Мальцевские чтения». Тезисы докладов. Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирский государственный университет, 2024. — P. 164.

[15] *Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V.* On families of theories of Abelian groups and their closures // Proceedings of the 11 Panhellenic logic symposium, Greece, Delphi, 12–16 July 2017. — [Greece], 2017. — P. 45–49.

[16] *Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V.* On least generating sets for families of theories of abelian groups // Algebra and model theory 13 : Collection of papers. — Novosibirsk : NSTU Publisher, 2021. — P. 100–105. (РИНЦ)

[17] *Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V.* On algebraic and definable closures for finite structures // Algebra and model theory 14 : Collection of papers. — Novosibirsk : NSTU Publisher, 2023. — P. 87–94. (РИНЦ)

[18] *Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V.* On e-spectra for families of theories of Abelian groups // Handbook of the 6 World Congress and school on universal logic, France, Vichy, 16–26 June 2018. — Vichy : Vichy University, 2018. — P. 237–238.

[19] *Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V.* On ranks for families of theories of abelian groups // 16 International congress on logic, methodology and philosophy of science and technology (CLMPST) : book of abstr., Czech Technical, Prague, 5–10 Aug. 2019. — Prague, 2019. — P. 374.

[20] *Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V.* On ranks for families of theories of finite abelian groups // Logic Colloquium 2019 : book of abstr., Czech Republic, Prague, 11–16 Aug. 2019. — Praha : MatfyzPress, 2019. — P. 92–93.

[21] *Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V.* On ranks for families of theories of finite abelian groups // The Bulletin of Symbolic Logic. — 2019. — Vol. 25, No. 4. — P. 524–525. - [Logic Colloquium 2019, Czech Republic, Prague, 11–16 Aug. 2019].

[22] *Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V.* On generations for families of theories of abelian groups // Мальцевские чтения = Mal'tsev meeting : тез. докл. междунар. конф., Новосибирск, 16–20 нояб. 2020 г. — Новосибирск, 2020. — С. 247.

[23] *Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V.* On rich properties for the family of theories of abelian groups // Logic Colloquium–2021. European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic : book of abstr., Poland, Poznan, 19–24 July 2021. — P. 145.

[24] *Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V.* On formulas and properties for families of theories of abelian groups // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Казахстанского дня работников науки Республики Казахстан, посвященная 75-летию академика Кальменова Тынысбека Шариповича : тез. докл. — Алматы : Изд-во ИМММ, 2021. — С. 135–136.

[25] *Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V.* On arities and aritizabilities of group and monoid theories // Мальцевские чтения = Mal'tsev meeting : тез. докл. междунар. конф., Новосибирск, 20–24 сент. 2021 г. — Новосибирск, 2021. — С. 170.

[26] *Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V.* On rich properties for the family of theories of abelian groups // The Bulletin of Symbolic Logic. — 2022. — Vol. 28, No. 2 : Logic Colloquium–2021. European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic : book of abstr., Poland, Poznan, 19–24 July 2021. — P. 309–310.

[27] *Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V.* On degrees of algebraization for finite structures // Мальцевские чтения = Mal'tsev meeting : тез. докл. междунар. конф, Новосибирск, 13–17 нояб. 2023 г. — Новосибирск : Ин-т математики им. С. Л. Соболева, 2023. — С. 121.

[28] *Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V.* On variations of rigidity for abelian groups // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня науки Республики Казахстан : тез. докл., Респ. Казахстан, Алматы, 16–19 апр. 2024 г. — Алматы : Изд-во ИМММ, 2024. — С. 247–249.