Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Б1.О.13.06 ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Направление подготовки (специальность) 03.05.02 Фундаментальная и прикладная физика

Профиль подготовки (специализация)

Форма обучения очная

Год набора 2024

Красноярск 2025

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Программу составили
профессор,д.ф.-м.н. И.В.Тимофеев

1 Цели и задачи изучения дисциплины

1.1 Цель преподавания дисциплины:

Формирование у студентов представления о вероятности события, основных типах распределений, функции распределения, случайных процессах, энтропии и информации. Эти знания дадут возможность будущему специалисту на практике применять методы теории вероятностей и математической статистики, понимать и анализировать математические методы, основанные на теории вероятностей и математической статистике.

1.2 Задачи изучения дисциплины:

В результате изучения данной дисциплины студент должен знать основы теории вероятностей и математической статистики. Уметь находить вероятности, средние, дисперсии. Иметь представление о марковских процессах, энтропии и информации, статистиках Больцмана, Бозе-Эйнштейна, Ферми-Дирака и Линден-Белла.

1.3 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы высшего образования:

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Запланированные результаты обучения по дисциплине
ОПК-2 Способен применять современный математический аппарат при построении количественных моделей физических явлений, процессов и систем в профессиональной деятельности;	
ОПК-2.1 Демонстрирует знания современных математических методов	знать определение вероятности события, основные типы распределений, функции распределения, понятия случайных процессов, энтропии и информации
ОПК-2.2 Применяет методы современного математического аппарата при решении задач теоретического и прикладного характера	уметь находить вероятности, средние, дисперсии и использовать знания теории вероятностей при решении профессиональных задач

Дисциплина реализуется без применения ЭО и ДОТ

2 Объем дисциплины (модуля)

Вид учебной работы	**Всего, зачетных единиц (акад.час)**	**Семестр**
		5
Общая трудоемкость дисциплины	2 (72)	2 (72)
Контактная работа с преподавателем:	1 (36)	1 (36)
занятия лекционного типа	0,5 (18)	0,5 (18)
практические занятия	0,5 (18)	0,5 (18)
Самостоятельная работа обучающихся	1 (36)	1 (36)
Вид промежуточной аттестации (Зачет)		Зачёт

3 Содержание дисциплины (модуля)

№ п/п	Вид работ	Темы занятия	Объем часов	Семестр /курс	Часы в эл. формате
Раздел 1. Вероятности событий					
1.	Лек	Введение. Предмет теории вероятностей. Краткие исторические сведения. Аксиоматическое построение теории вероятностей. Событие. Элементарное событие. Пространство элементарных событий. Достоверное событие. Взаимоисключающие события. Полная группа несовместных элементарных событий.	2	5	
2.	Лек	Аксиомы теории вероятностей. Определение вероятности (классическое, статистическое, геометрическое, временное). Понятие об эргодической гипотезе. Условная вероятность. Правила сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формулы Байеса. Элементы комбинаторики.	2	5	
3.	Пр	Введение. Предмет теории вероятностей. Краткие исторические сведения. Аксиоматическое построение теории	2	5	
4.	Пр	Аксиомы теории вероятностей. Определение вероятности (классическое, статистическое, геометрическое, временное). Понятие об эргодической гипотезе. Условная вероятность. Правила сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формулы Байеса. Элементы комбинаторики.	2	5	
5.	Ср	Самостоятельная работа	5	5	
Раздел 2. Дискретные случайные величины					
1.	Лек	Последовательность независимых испытаний. Независимые испытания. Биноминальный закон распределения. Нормировка распределения. Мода. Понятие среднего. Дисперсия как мера флуктуации. Формула для произвольного момента. Среднее квадратичное отклонение. Формула для произвольного момента. Геометрическое распределение. Распределение Пуассона. Локальная предельная теорема Муавра-Лапласа. Другие распределения: гипергеометрическое, полиномиальное.	2	5	
2.	Пр	Последовательность независимых испытаний. Независимые испытания. Биноминальный закон распределения. Нормировка распределения. Мода. Понятие среднего. Дисперсия как мера флуктуации. Формула для произвольного момента. Среднее квадратичное отклонение. Формула для произвольного момента. Геометрическое распределение. Распределение Пуассона. Локальная предельная теорема Муавра-Лапласа. Другие распределения: гипергеометрическое, полиномиальное.	2	5	
3.	Ср	Самостоятельная работа	5	5	
Раздел 3. Непрерывные случайные величины					
1.	Лек	Случайные величины и функции распределения. Непрерывная случайная величина. Функция распределения. Примеры непрерывных распределений (нормальное, гамма, Стьюдента, Фишера. Пирсона). Плотность распределения. Асимметрия и эксцесс. Нормальный (Гауссов) закон распределения. Диффузия броуновской частицы с точки зрения нормального распределения. Распределение суммы двух величин, распределенных по нормальному закону.	2	5	
2.	Лек	Многомерные случайные величины и их функции распределения. Корреляционный момент, коэффициент корреляции. Распределение Максвелла. Гамма распределение.	2	5	
3.	Пр	Случайные величины и функции распределения. Непрерывная случайная величина. Функция распределения. Примеры непрерывных распределений (нормальное, гамма, Стьюдента, Фишера. Пирсона). Плотность распределения. Асимметрия и эксцесс. Нормальный (Гауссов) закон распределения. Диффузия броуновской частицы с точки зрения нормального распределения. Распределение суммы двух величин, распределенных по нормальному закону.	2	5	

4.	Пр	Случайные величины и функции распределения. Непрерывная случайная величина. Функция распределения. Примеры непрерывных распределений (нормальное, гамма, Стьюдента, Фишера. Пирсона). Плотность распределения. Асимметрия и эксцесс. Нормальный (Гауссов) закон распределения. Диффузия броуновской частицы с точки зрения нормального распределения. Распределение суммы двух величин, распределенных по нормальному закону.	2	5	
5.	Ср	Самостоятельная работа	5	5	
Раздел 4. Предельные теоремы теории вероятностей					
1.	Лек	Характеристические функции. Характеристическая функция, явный вид характеристических функций для биноминального, пуассоновского, нормального, гамма и равномерного распределений. Применения характеристических функций для вычислений моментов произвольных порядков и функций распределения.Закон больших чисел. Неравенство Чебышева. Закона больших чисел в форме Чебышева и Бернулли. Центральная предельная теорема.	2	5	
2.	Пр	Характеристические функции. Характеристическая функция, явный вид характеристических функций для биноминального, пуассоновского, нормального, гамма и равномерного распределений. Применения характеристических функций для вычислений моментов произвольных порядков и функций распределения.Закон больших чисел. Неравенство Чебышева. Закона больших чисел в форме Чебышева и Бернулли. Центральная предельная теорема.	2	5	
3.	Ср	Самостоятельная работа	5	5	
Раздел 5. Случайный процесс					
1.	Лек	Понятие случайного процесса. Марковский процесс. Уравнение Чепмена-Колмогорова-Смолуховского. Уравнение Маркова. Диффузия броуновской частицы как марковский процесс. Уравнения Фоккера-Планка.	2	5	
2.	Пр	Понятие случайного процесса. Марковский процесс. Уравнение Чепмена-Колмогорова-Смолуховского. Уравнение Маркова. Диффузия броуновской частицы как марковский процесс. Уравнения Фоккера-Планка.	2	5	
3.	Ср	Самостоятельная работа	5	5	
Раздел 6. Энтропия и информация					
1.	Лек	Понятие энтропии в термодинамике и статистической физике. Понятие энтропии и информации с точки зрения теории вероятности.	2	5	
2.	Пр	Понятие энтропии в термодинамике и статистической физике. Понятие энтропии и информации с точки зрения теории вероятности.	2	5	
3.	Ср	Самостоятельная работа	5	5	
Раздел 7. Математическая статистика					
1.	Лек	Генеральная совокупность и выборка. Принцип наибольшего правдоподобия. Оценка параметров линейной регрессии. Задача о вероятности заселения и наивероятнейшем заселении многоуровневой системы для статистики Больцмана, Бозе-Эйнштейна, Ферми-Дирака и Линден-Белла. Критерий согласия.	2	5	
2.	Пр	Генеральная совокупность и выборка. Принцип наибольшего правдоподобия. Оценка параметров линейной регрессии. Задача о вероятности заселения и наивероятнейшем заселении многоуровневой системы для статистики Больцмана, Бозе-Эйнштейна, Ферми-Дирака и Линден-Белла. Критерий согласия.	2	5	
3.	Ср	Самостоятельная работа	6	5	
4.	Зачёт	Зачет		5	

4 Учебно-методическое обеспечение дисциплины

4.1 Печатные и электронные издания:

1. Хрущева И. В. Теория вероятностей:учебное пособие. - Санкт-Петербург: Лань, 2009. - 299 с..

2. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика:учебное пособие для студентов вузов. - Москва: Высшее образование, 2007. - 478 с..

3. Королев В. Ю. Теория вероятностей и математическая статистика:учебник для вузов. - М.: Проспект, 2008. - 160 с..

4. Тактаров Н. Г. Теория вероятностей и математическая статистика. Краткий курс с примерами и решениями:учеб. пособие для вузов. - Москва: URSS, 2010. - 235 с..

5. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика:учеб. пособие для вузов. - М.: Юрайт, 2010. - 479 с..

6. Рубан А. И. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]:учебное пособие. - Красноярск: СФУ, 2012. - 410 с. – Режим доступа: http://lib3.sfu-kras.ru/ft/lib2/elib/b22/i-359746.pdf .

7. Туганбаев А.А., Крупин В. Г. Теория вероятностей и математическая статистика:учеб. пособие. - Санкт-Петербург: Лань, 2011. - 220 с..

8. Балдин К.В., Башлыков В.Н., Рукосуев А.В. Теория вероятностей и математическая статистика:учебник.; рекомендовано ГОУ ВПО "Государственный университет управления". - М.: "Дашков и К", 2010. - 473 с..

9. Миносцев В. Б. Курс математики для технических высших учебных заведений. Часть 4. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]:. - Москва: Лань", 2013. - – Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=32817 .

10. Жабрун И. В. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]:учебно-методическое пособие для самостоятельной работы [для студентов спец. 010701.65 «Физика», 010704.65 «Физика конденсированного состояния вещества», 010708.65 «Биохимическая физика», 140301.65 «Физика конденсированного состояния вещества» и напр. 010700.62 «Физика»]. - Красноярск: СФУ, 2012. - – Режим доступа: http://lib3.sfu-kras.ru/ft/lib2/elib/b22/i-318718.pdf .

11. Тегай С.Ф. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]:[учеб-метод. материалы к изучению дисциплины для ...03.03.02.01 Фундаментальная физика, 03.03.02.07 Биохимическая физика, 14.03.02 Ядерные физика и технологии, 16.03.01 Техническая физика, 28.03.01.02 Материалы микро- и наносистемной техники]. - Красноярск: СФУ, 2018. - – Режим доступа: https://e.sfu-kras.ru/course/view.php?id=17903 .

4.2 Лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение, в том числе отечественного производства (программное обеспечение, на которое университет имеет лицензию, а также свободно распространяемое программное обеспечение):

1. Adobe Acrobat Reader DC . Программное обеспечение для просмотра и печати файлов PDF.

2. Microsoft Office Professional Plus 2007 Russian Academic. Офисный пакет Microsoft Office.

4.3 Интернет-ресурсы, включая профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

1. Мир математических уравнений http://eqworld.ipmnet.ru
2. Поисковая машина электронных книг http://www.poiskknig.ru
3. Файловый архив для студентов http://www.studfiles.ru

5 Фонд оценочных средств

Фонд оценочных средств является приложением к рабочей программе дисциплины (модуля), хранится на кафедре, обеспечивающей преподавание данной дисциплины (модуля).

6 Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

учебная аудитория для проведения лекционных, семинарских и практических занятий: Специализированная мебель, демонстрационное оборудование, АРМ преподавателя, подключение к сети «Интернет» и индивидуальный неограниченный доступ в ЭИОС университета

помещение для самостоятельной работы обучающихся: специализированная мебель, демонстрационное оборудование, АРМ преподавателя, АРМ обучающихся, подключение к сети «Интернет» и индивидуальный неограниченный доступ в ЭИОС университета

Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

По дисциплине (модулю)/ практике
Б1.О.13.06 Теория вероятностей и математическая статистика

Направление подготовки/специальность
03.05.02 Фундаментальная и прикладная физика

Образовательная программа
03.05.02.30 Фундаментальная и прикладная физика

Красноярск 2025

1. Перечень компетенций с указанием индикаторов их достижения, соотнесенных с результатами обучения по дисциплине (модулю), практики и оценочными средствами

Семестр[1]	Код и содержание индикатора компетенции	Результаты обучения[2]	Оценочные средства[3]
ОПК-2: Способен применять современный математический аппарат при построении количественных моделей физических явлений, процессов и систем в профессиональной деятельности			
5	ОПК-2.1: Демонстрирует знания современных математических методов	знать определение вероятности события, основные типы распределений, функции распределения, понятия случайных процессов, энтропии и информации	Решение задач Контрольная работа Вопросы к зачету
5	ОПК-2.2: Применяет методы современного математического аппарата при решении задач теоретического и прикладного характера	уметь находить вероятности, средние, дисперсии и использовать знания теории вероятностей при решении профессиональных задач	Решение задач Контрольная работа Вопросы к зачету

2. Типовые оценочные средства или иные материалы, с описанием шкал оценивания и методическими материалами, определяющими процедуру проведения и оценивания достижения результатов обучения

Раздел 1. Вероятности событий

Задачи

1. (Элементарное событие, пространство элементарных событий) Монета подбрасывается дважды. Опишите пространство элементарных событий. Какое элементарное событие соответствует выпадению сначала орла, а затем решки?

2. (Достоверное событие) В коробке лежат только красные шары. Какова вероятность вытащить из коробки красный шар? Обоснуйте свой ответ.

[1] Семестры указываются по порядку, для каждого индикатора

[2] Указываются результаты обучения по дисциплине (модулю), практике, соотнесенные с индикатором достижения компетенции.

[3] Указываются оценочные средства для каждого индикатора.

3. (Взаимоисключающие события) При подбрасывании кубика являются ли взаимоисключающими события «выпало число 1» и «выпало число 6»? Почему?

4. (Полная система несовместных элементарных событий) Опишите полную систему несовместных элементарных событий при бросании игральной кости.

5. (Правило сложения вероятностей) В урне 5 красных и 3 синих шара. Какова вероятность вытащить красный или синий шар?

6. (Правило умножения вероятностей) Два стрелка независимо друг от друга стреляют по мишени. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,8, для второго — 0,7. Какова вероятность того, что оба стрелка попадут в мишень?

7. (Комбинаторика: Перестановки) Сколькими способами можно расставить 5 разных книг на полке?

8. (Комбинаторика: сочетания) В классе 25 учеников. Сколькими способами можно выбрать 3 учеников для участия в олимпиаде?

9. (Комбинаторика: размещения) Сколькими способами можно выбрать капитана и его заместителя из команды, состоящей из 10 человек?

10. (Правило сложения и умножения вероятностей) В корзине 3 яблока и 2 груши. Наугад берут два фрукта. Какова вероятность того, что оба фрукта — яблоки?

11. (Условная вероятность) Монету подбросили дважды. Известно, что хотя бы один раз выпал орел. Какова вероятность того, что орел выпадет дважды?

12. (Формула полной вероятности) На фабрике детали изготавливают на трёх станках. Первый станок производит 30% всех деталей, второй — 45%, третий — 25%. Вероятность брака для первого станка составляет 0,01, для второго — 0,02, для третьего — 0,015. Какова вероятность того, что случайно выбранная деталь окажется бракованной?

13. (Формула Байеса) Известно, что случайно выбранная деталь оказалась бракованной (см. предыдущую задачу). Какова вероятность того, что она была изготовлена на первом станке?

14. (Правило умножения для зависимых событий) В урне 10 шаров, из них 3 белых. Из урны последовательно вынимают два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся белыми?

15. (Комбинаторика и вероятность) В коробке 6 красных и 4 синих шара. Наугад вынимают 3 шара. Какова вероятность того, что среди них окажется 2 красных и 1 синий шар?

16. (Правило сложения вероятностей для несовместных событий) Вероятность сдать экзамен на «отлично» равна 0,2, на «хорошо» — 0,5. Какова вероятность сдать экзамен на «отлично» или «хорошо»?

17. (Формула полной вероятности и формула Байеса) Имеется две урны. В первой урне 2 белых и 3 чёрных шара, во второй — 4 белых и 1 чёрный. Из наугад выбранной урны вынимают шар.

а) Какова вероятность, что вынутый шар окажется белым?

б) Шар оказался белым. Какова вероятность того, что он был извлечён из первой урны?

18. (Вероятность противоположного события) Стрелок попадает в цель с вероятностью 0,7. Какова вероятность того, что он промахнётся?

19. (Комбинаторика и правило умножения) Сколькими способами можно составить трёхзначное число, используя цифры 1, 2, 3, 4, 5, если цифры не могут повторяться?

20. (Формула Байеса — медицинская диагностика) Тест на определенное заболевание дает положительный результат в 99% случаев, когда человек действительно болен. Однако он также дает ложноположительный результат в 2% случаев для здоровых людей. Известно, что 0,5% населения болеет этим заболеванием. Если человек получил положительный результат теста, какова вероятность того, что он действительно болен?

Раздел 2 Дискретные случайные величины

1. Вероятностное распределение и математическое ожидание. Случайная величина X принимает значения 1, 2, 3 с вероятностями 0,3, 0,5, 0,2 соответственно.

а) Найдите математическое ожидание E(X).

б) Найдите дисперсию D(X).

2. Биномиальное распределение. Монету подбрасывают 5 раз. Вероятность выпадения орла при каждом броске равна 0,5. Пусть X — число выпавших орлов.

а) Найдите вероятностное распределение случайной величины X.

б) Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно 3 раза.

в) Найдите математическое ожидание E(X) и дисперсию D(X).

3. Распределение Пуассона. В среднем на телефонную станцию поступает 3 вызова в минуту. Найдите вероятность того, что в течение минуты поступит:

а) 0 вызовов.

б) 2 вызова.

в) не более 2 вызовов.

4. Геометрическое распределение. Вероятность успеха в каждом испытании равна 0,2. Пусть X — число испытаний до первого успеха.

а) Найдите вероятностное распределение случайной величины X.

б) Найдите вероятность того, что первый успех произойдет на третьем испытании.

в) Найдите математическое ожидание E(X).

5. Гипергеометрическое распределение. В урне 10 шаров, из которых 4 белых и 6 черных. Из урны наугад извлекают 3 шара. Пусть X — число извлеченных белых шаров.

а) Найдите вероятностное распределение случайной величины X.

б) Найдите вероятность того, что будет извлечено ровно 2 белых шара.

Раздел 3 Непрерывные случайные величины

1. Функция распределения и плотность вероятности: Функция распределения случайной величины X задана как F(x) = 1 - e^(-2x) при x >= 0 и F(x) = 0 при x < 0.

а) Найдите плотность вероятности f(x).

б) Вычислите $P(1 < X < 2)$.

2. Нормальное распределение: базовые расчеты Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами математическое ожидание $\mu = 5$ и среднеквадратичное отклонение $\sigma = 2$.

а) Найдите вероятность $P(X > 7)$.

б) Найдите вероятность $P(3 < X < 6)$.

3. Гамма-распределение: параметры и вероятности Случайная величина X имеет гамма-распределение с параметрами $\alpha = 2$ и $\beta = 3$.

а) Запишите плотность вероятности f(x) для X.

б) Вычислите математическое ожидание E(X) и дисперсию D(X).

4. Распределение Стьюдента: степени свободы и вероятности Случайная величина T имеет распределение Стьюдента с $\nu = 5$ степенями свободы.

а) Найдите $P(T > 2)$ (используйте таблицу распределения Стьюдента или калькулятор).

б) Сравните $P(T > 2)$ с вероятностью $P(Z > 2)$, где Z имеет стандартное нормальное распределение. Объясните разницу.

5. Плотность распределения и математическое ожидание: Плотность вероятности случайной величины X задана как f(x) = kx при $0 < x < 2$ и f(x) = 0 в противном случае.

а) Найдите значение константы k.

б) Вычислите математическое ожидание E(X).

6. Асимметрия и эксцесс: для данной выборки: 2, 4, 6, 8, 10

а) Вычислите асимметрию и эксцесс.

б) Интерпретируйте полученные значения асимметрии и эксцесса.

7. Броуновское движение и нормальное распределение: положение броуновской частицы в момент времени t описывается нормальным распределением с математическим ожиданием, равным начальному положению (0), и дисперсией, пропорциональной времени: D(t) = 2Dt, где D — коэффициент диффузии. Если D = 0,5, найдите вероятность того, что в момент времени t = 4 частица будет находиться в интервале (-1, 1).

8. Распределение Фишера (F-распределение): Случайная величина F имеет F-распределение с v1=5 и v2 =10 степенями свободы. Найдите $P(F > 3)$ (используйте таблицу F-распределения или онлайн-калькулятор)

9. Сумма двух нормальных величин: X и Y — независимые случайные величины с нормальным распределением: X ~ N(2, 1) и Y ~ N(3, 4). Найдите распределение случайной величины Z = X + Y. Каковы математическое ожидание и дисперсия Z?

10. Применение нормального распределения в реальной жизни: Рост студентов в университете имеет нормальное распределение со средним значением 175 см и стандартным отклонением 8 см.

а) Какой процент студентов имеет рост выше 190 см?

б) Найдите интервал, в котором находится рост 95% студентов (центральный интервал).

Раздел 4 Предельные теоремы теории вероятностей

1. Теорема Бернулли (Закон больших чисел):

Монету подбрасывают 1000 раз. Вероятность выпадения орла при каждом подбрасывании равна 0,5. Используя теорему Бернулли, оцените вероятность того, что частота выпадения орла отклонится от вероятности 0,5 не более чем на 0,01. (То есть найдите $P(|f - p| <= \varepsilon)$, где f — частота, p — вероятность, ε = 0,01)

2. Центральная предельная теорема (ЦПТ) - монеты:

Монету подбрасывают 100 раз. Вероятность выпадения орла при каждом подбрасывании равна 0,5. Используя ЦПТ, оцените вероятность того, что число выпавших орлов будет находиться в интервале от 45 до 55.

3. Центральная предельная теорема (ЦПТ) - зарплаты:

Предположим, что средняя зарплата сотрудников компании составляет 60 000 руб. и имеет стандартное отклонение 10 000 руб. Случайным образом выбирают 100 сотрудников. Используя ЦПТ, оцените вероятность того, что средняя зарплата выбранных сотрудников будет находиться в интервале от 58 000 до 62 000 руб.

4. Закон больших чисел (Чебышева):

Доказать, что если случайные величины X1, X2, …, Xn независимы, имеют одинаковые математические ожидания E(Xi) = a и дисперсии D(Xi) = σ^2, то среднее арифметическое этих величин сходится по вероятности к a. (То есть, показать, что для любого $\varepsilon > 0$, $P(|(X1 + X2 + \ldots + Xn)/n - a| > \varepsilon)$ стремится к 0 при n -> ∞)

5. Применение ЦПТ для приближения биномиального распределения:

Вероятность успеха в каждом из 400 независимых испытаний Бернулли равна 0,4. Используя центральную предельную теорему, найдите приближённое значение вероятности того, что число успехов будет не меньше 150 и не больше 170.

Рекомендации по решению:

Теорема Бернулли: используйте неравенство Чебышева для оценки вероятности отклонения.

Центральная предельная теорема: нормализуйте случайную величину (вычтите математическое ожидание и разделите на стандартное отклонение) и используйте таблицу стандартного нормального распределения для нахождения вероятностей.

Закон больших чисел (Чебышева): используйте неравенство Чебышева.

Приближение биномиального распределения: вычислите математическое ожидание и дисперсию биномиального распределения, затем примените ЦПТ для аппроксимации нормальным распределением. Не забудьте про поправку на непрерывность!

Раздел 5 Случайный процесс

1. Процесс Пуассона: Количество событий за время

Количество телефонных звонков, поступающих на коммутатор в течение времени t, описывается пуассоновским процессом с интенсивностью $\lambda = 5$ звонков в минуту.

а) Какова вероятность того, что в течение 2 минут поступит ровно 10 звонков?

б) Какова вероятность того, что в течение 3 минут поступит не более 5 звонков?

2. Винеровский процесс (броуновское движение): вероятность достижения уровня

Пусть W(t) — винеровский процесс (стандартное броуновское движение).

а) Найдите вероятность того, что $W(4) > 2$.

б) Найдите вероятность того, что $W(1) > 0$ и $W(2) < 0$.

3. Марковский процесс: Вероятность перехода

Имеется система с тремя состояниями: 1, 2 и 3. Система переходит из одного состояния в другое в дискретные моменты времени. Матрица переходных вероятностей имеет вид:

P = [0.5, 0.3, 0.2],
 [0.1, 0.6, 0.3],
 [0.4, 0.2, 0.4]

а) Если система находится в состоянии 1 в момент времени t, какова вероятность того, что она будет находиться в состоянии 3 в момент времени t+1?

б) Если система находится в состоянии 2 в момент времени t, какова вероятность того, что она будет находиться в состоянии 2 в момент времени t+2?

4. Стационарный процесс: Автокорреляционная функция

Случайный процесс X(t) имеет автокорреляционную функцию $R(\tau) = 9 * \exp(-|\tau|)$. Математическое ожидание E[X(t)] постоянно.

а) Является ли процесс X(t) стационарным в широком смысле? Объясните.

б) Найдите дисперсию процесса X(t).

5. Случайное блуждание: Вероятность возврата

Частица начинает случайное блуждание из точки 0 на числовой прямой. На каждом шаге частица перемещается на +1 с вероятностью p = 0,6 или на -1 с вероятностью q = 0,4.

а) Какова вероятность того, что после двух шагов частица вернётся в исходную точку 0?

б) (Более сложный вариант) Найдите вероятность того, что частица когда-нибудь вернётся в исходную точку 0. (Подсказка: этот вопрос связан с вероятностью выживания).

Рекомендации по решению:

Процесс Пуассона: используйте формулу для вероятности k событий за время t: $P(N(t) = k) = (\lambda t)^k * \exp(-\lambda t) / k!$

Винеровский процесс: $W(t) \sim N(0, t)$. Используйте свойства нормального распределения для вычисления вероятностей. Независимость приращений: $W(t) - W(s) \sim N(0, t-s)$.

Марковский процесс: чтобы найти вероятность перехода за несколько шагов, возведите матрицу переходных вероятностей в соответствующую степень.

Стационарный процесс: процесс является стационарным в широком смысле, если его математическое ожидание постоянно, а автокорреляционная функция зависит только от разности во времени τ. Дисперсия: $D(X(t)) = R(0)$.

Случайное блуждание: подумайте о возможных траекториях возвращения и их вероятностях. Для более сложного вопроса о возвращении потребуются знания о рекуррентных и нерекуррентных случайных блужданиях.

Раздел 6 Энтропия и информация

1. Энтропия дискретной случайной величины:

Дискретная случайная величина X принимает значения 1, 2, 3 и 4 с вероятностями 0,1, 0,2, 0,3 и 0,4 соответственно.

а) Вычислите энтропию H(X) этой случайной величины (в битах).

б) Какова максимальная энтропия, которую может иметь случайная величина, принимающая 4 значения? При каком распределении достигается максимальная энтропия?

2. Условная энтропия:

Пусть X и Y — две дискретные случайные величины со следующим совместным распределением:

	Y = 0	**Y = 1**
X = 0	0.1	0.2
X = 1	0.3	0.4

а) Вычислите энтропию H(X).

б) Вычислите энтропию H(Y).

в) Вычислите условную энтропию H(X|Y).

г) Вычислите взаимную информацию I(X;Y).

3. Источник информации: Эффективность кодирования:

Источник информации выдаёт символы A, B, C, D и E с вероятностями 0,3, 0,25, 0,2, 0,15 и 0,1 соответственно.

а) Вычислите энтропию источника информации H.

б) Допустим, мы используем код с фиксированной длиной (т. е. все символы кодируются одинаковым количеством бит). Какова минимальная длина кода, необходимая для однозначной кодировки всех символов?

в) Оцените минимальное среднее количество бит, необходимое для кодирования символов источника, используя оптимальное кодирование (например, код Хаффмана). Сравните с энтропией H.

4. Двоичный канал связи: Пропускная способность

Рассмотрим двоичный симметричный канал (BSC) с вероятностью ошибки p = 0,1.

а) Какова пропускная способность этого канала?

б) При какой вероятности ошибки p пропускная способность BSC будет максимальной?

5. Связь между энтропией и случайностью:

Сравните энтропию следующих случайных величин:

X1: P(X1 = 0) = 1, P(X1 = 1) = 0

X2: P(X2 = 0) = 0,9, P(X2 = 1) = 0,1

X3: P(X3 = 0) = 0,5, P(X3 = 1) = 0,5

а) Вычислите энтропию H(X1), H(X2) и H(X3).

б) Объясните, как значения энтропии отражают степень случайности каждой случайной величины.

Формулы и полезные сведения:

Энтропия дискретной случайной величины: H(X) = - Σ P(xi) * log2(P(xi))

Условная энтропия: H(X|Y) = - Σ Σ P(x, y) * log2(P(x|y))

Взаимная информация: I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)

Пропускная способность двоичного симметричного канала: C = 1 - H(p), где H(p) = -p*log2(p) - (1-p)*log2(1-p) (энтропия Бернулли)

Максимальная энтропия: Достигается при равномерном распределении.

Раздел 7 Математическая статистика

1. Оценка параметров: Точечные оценки

Дана выборка из генеральной совокупности: 5, 7, 9, 11, 13.

а) Найдите выборочное среднее.

б) Найдите выборочную дисперсию (с поправкой Бесселя).

в) Предполагая, что генеральная совокупность имеет нормальное распределение, оцените математическое ожидание и дисперсию генеральной совокупности, используя полученные выборочные характеристики.

2. Доверительные интервалы: Среднее значение нормального распределения

Измерена длина 100 деталей. Выборочное среднее значение составило 15,0 см, а выборочное стандартное отклонение (с поправкой Бесселя) — 0,2 см. Предположив, что длина деталей распределена нормально, постройте 95%-ный доверительный интервал для среднего значения длины деталей во всей партии. (Используйте t-распределение Стьюдента, так как дисперсия неизвестна)

3. Проверка гипотез: Одновыборочный t-тест

Утверждается, что средний вес конфет определённого вида составляет 20 грамм. Была взята выборка из 16 конфет, и средний вес в выборке составил 19,5 грамма, а выборочное стандартное отклонение (с поправкой Бесселя) — 0,8 грамма. Проверьте гипотезу о том, что средний вес конфет равен 20 граммам, против альтернативной гипотезы о том, что средний вес отличается от 20 грамм, на уровне значимости 5%.

4. Линейная регрессия: Оценка параметров и проверка значимости

Даны следующие данные о зависимости между переменными X и Y:

X	**Y**
1	2
2	4
3	5
4	7
5	9

а) Найдите уравнение линейной регрессии Y = a + bX, используя метод наименьших квадратов.

б) Вычислите коэффициент детерминации R^2. Что он показывает?

Рекомендации по решению:

Оценка параметров: помните о разнице между выборочными статистическими данными и оценками параметров генеральной совокупности. Поправка Бесселя нужна для несмещенной оценки дисперсии.

Доверительные интервалы: определите правильное распределение (t или Z) в зависимости от того, известна ли дисперсия генеральной совокупности. Используйте таблицы распределений для поиска критических значений.

Проверка гипотез: сформулируйте нулевую и альтернативную гипотезы. Вычислите тестовую статистику. Сравните тестовую статистику с критическим значением (или вычислите p-значение) и сделайте вывод.

Линейная регрессия: используйте формулы метода наименьших квадратов для нахождения коэффициентов a и b. R^2 показывает долю дисперсии Y, объясняемую линейной зависимостью от X.

Методические рекомендации по решению задач

Задача является одним из видов оценочных средств для систематической проверки знаний по дисциплине. Этот вид проверочных заданий позволяет получать первичную информацию о ходе и качестве усвоения учебного материала, а также стимулировать регулярную целенаправленную работу студентов. Комплект задач формируется на каждое занятие. Решение и сдача задач осуществляется во время практических занятий.

Критерии оценивания решения задач

Итоги этого вида текущего контроля усвоения материала «уровневой оценке» не подлежат. Оценка – зачет/незачет.

Шкала оценивания	
незачет	зачет
При решении задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки. Уровень знаний ниже минимальных требований.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме (допускаются некоторые недочеты). Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки.

Тема: все темы курса

Контрольная работа

Вариант 1

1.Сколько существует пятизначных чисел, удовлетворяющих хотя бы одному из двух условий: 1) пятизначное число имеет первую цифру 3, последнюю – 5; 2) в этом числе хотя бы один раз встречается цифра 7?

2.В городе проживает $n+1$ человек. Один из них, узнав новость, сообщает ее другому, тот – третьему и т. д., причем передача новости осуществляется следующим образом: человек, которому сообщена новость, случайным образом выбирает одного из n жителей и сообщает новость ему, тот поступает точно так же и т. д. Найти вероятность того, что новость будет передана r раз без повторного сообщения ее кому-либо. *(10 баллов)*

3.Любое кубическое уравнение

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

с комплексными коэффициентами при помощи замены переменной

$$x=y-\frac{b}{3a}$$

может быть приведено к каноническому виду

$$y^3+py+q=0, \qquad (*)$$

где $p=\dfrac{3ac-b^2}{3a^2}$, $q=\dfrac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^3}$. Оказывается, что если p и q вещественны, то уравнение (*) имеет

а) один вещественный и два сопряженных комплексных корня при $\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2>0$;

б) один однократный вещественный и один двухкратный вещественный, если $\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=0$, или один трехкратный вещественный, если к тому же $p=q=0$;

в) три вещественных корня, если $\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2<0.$

Точка (p,q) наудачу бросается в квадрат $[-1,1]\times[-1,1]$. Найти вероятность того, что уравнение (*) будет иметь ровно один вещественный корень.

Вариант 2

1.Некий математик носит с собой два коробка спичек, в каждом из которых первоначально было по *N* спичек. Когда ему нужна спичка, он выбирает наугад один из коробков. Найти вероятность того, что когда математик вынет в первый раз пустой коробок, в другом будет *r* спичек.

2. *N* стрелков стреляют поочередно по одной мишени. Вероятность попасть в мишень для *i*-го стрелка равна p_i. Выигравшим считается тот стрелок, который первым попадет в мишень. У каждого стрелка имеется *n* патронов. Определить вероятность того, что выиграет *k*-й стрелок.

3.Отрезок лежит внутри квадрата со стороной *a* и соединяет одну из вершин (*A*) с какой-либо другой стороной или противоположной вершиной квадрата. Плотность функции распределения угла между стороной, проходящей через вершину *A*, и отрезком, равномерная. Найти функцию распределения длины отрезка.

Методические рекомендации по проведению контрольной работы:

На контрольном занятии каждый студент получает соответствующий вариант задания, который содержит 3 задачи и самостоятельно решает его в течение 45 минут.

Критерии оценки контрольной работы

Оценка «**отлично**» выставляется студенту, если решены не менее трех задач контрольной работы, последовательность изложения решения логически стройная и дополнена комментариями, но при этом могут быть допущены несущественные ошибки.

Оценка «**хорошо**» выставляется студенту, если решены не менее двух задач контрольной работы, последовательность изложения решения логически стройная, не допускается существенных неточностей, правильно применяются теоретические положения.

Оценка «**удовлетворительно**» выставляется студенту, если решено не менее одной задачи контрольной работы, при этом может быть нарушена логическая последовательность изложения решения, допускаются неточности и недостаточно правильные формулировки.

Оценка «**неудовлетворительно**» выставляется студенту, если решено менее одной задачи контрольного задания, допущены существенные ошибки.

Перечень вопросов к зачету:

1. Начала комбинаторного анализа.
2. Классическое определение вероятности.
3. Геометрическое определение вероятности.
4. Аксиоматика теории вероятностей.
5. Условная вероятность и независимость событий.
6. Формулы полной вероятности и Байеса.
7. Схема Бернулли.
8. Случайные величины. Распределение случайной величины. Функция распределения. Нормальное распределение.
9. Математическое ожидание случайной величины и его свойства.
10. Дисперсия и моменты старших порядков случайной величины. Их свойства.
11. Ковариация двух случайных величин и ее основные свойства.
12. Коэффициент корреляции и его основные свойства.
13. Неравенства Чебышева.
14. Закон больших чисел.
15. Центральная предельная теорема.
16. Предельная теорема Муавра-Лапласа.
17. Характеристические функции: определения и примеры.
18. Выборочное распределение, эмпирическая функция распределения, гистограмма. Выборочные моменты.
19. Состоятельность выборочных характеристик. Теоремы Колмогорова и Гливенко-Кантелли (без доказательства). Свойства гистограммы. Свойства выборочных моментов.
20. Точечные оценки и их свойства. Метод моментов. Свойства оценок метода моментов. Метод максимального правдоподобия.
21. Сравнение оценок: среднеквадратический и асимптотический подходы.
22. Эффективные оценки: регулярность семейства распределений, неравенство Рао-Крамера, проверка эффективности оценок.
23. Доверительные интервалы. Принципы их построения.
24. Основные статистические распределения: гамма-распределение, распределение χ^2 Пирсона, распределение Стьюдента, распределение

Фишера.
25. Гипотезы и критерии. Подходы к сравнению критериев: минимаксный подход, подход Байеса. Выбор наиболее мощного критерия.
26. Критерии для проверки гипотезы о распределении: критерий Колмогорова, критерий χ^2 Пирсона, критерий χ^2 для проверки параметрической гипотезы.
27. Критерии для проверки однородности: двухвыборочный критерий Колмогорова-Смирнова, ранговый критерий Вилкоксона, Манна и Уитни, критерий Фишера, критерий Стьюдента.
28. Однофакторный дисперсионный анализ.
29. Критерий χ^2 для проверки независимости.
30. Проверка простых гипотез о параметрах: проверка гипотезы о среднем нормального распределения с известной дисперсией, проверка гипотезы о среднем нормального распределения с неизвестной дисперсией, критерии, основанные на доверительных интервалах.
31. Исследование статистической зависимости: математическая модель регрессии и общая модель линейной регрессии.
32. Построение эффективных оценок. Условное математическое ожидание и его вычисление, подход Байеса к оцениванию параметров, полные и достаточные статистики.

Методические рекомендации к зачету:

По результатам контрольных работ и процента посещаемости семинарских занятий в конце семестра студенты получают допуск к зачету.

В случае отсутствия допуска к зачету существует дополнительная возможность его получить, путем самостоятельного решения дополнительных контрольных заданий. Зачет проходит в устной форме по двум вопросам из разных разделов курса.

Критерии оценки зачета:

«Зачтено» выставляется обучающемуся, если в ответе верно изложено не менее 50% материала и не допущено существенных неточностей.

«Не зачтено» выставляется обучающемуся, который не знает значительной части (более 50 %) программного материала и допускает существенные ошибки.

Разработчик И.В.Тимофеев