На правах рукописи

Дураков Матвей Евгеньевич

ВЫЧЕТЫ ГРОТЕНДИКА И МНОГОМЕРНЫЕ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

1.1.1 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ
(физико-математические науки)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Красноярск – 2025

Работа выполнена в ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет»

Научный руководитель:
д-р физ.-мат. наук, профессор
Цих Август Карлович

Официальные оппоненты:
Лобода Александр Васильевич, д-р физ.-мат. наук, доцент,
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»,
кафедра цифровых технологий, профессор

Садыков Тимур Мрадович, д-р физ.-мат. наук, доцент,
ФГБОУ ВО «Российский экономический университет имени
Г. В. Плеханова», Учебно-научная лаборатория искусственного
интеллекта, нейротехнологий и бизнес-аналитики,
заведующий научной лабораторией

Ведущая организация:
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования «Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова»

Защита состоится 18 декабря 2025 года в 15.30 на заседании диссертационного совета 24.2.404.14 при ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79/10, ауд. Р8-06.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» https://sfu.ru/ru

Автореферат разослан «___» октября 2025 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Кравцова Ольга Вадимовна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ [1]

Актуальность темы.

В теории функций одной комплексной переменной для функции $f(z)$ (дифференциальной формы $\omega = f(z)dz$) существует два эквивалентных определения вычета в точке $a \in \mathbb{C}$. С одной стороны, вычет — это коэффициент c_{-1} при мономе $(z-a)^{-1}$ в разложении функции $f(z)$ в проколотой окрестности изолированной точки a в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z-a)^k.$$

С другой стороны, вычет можно рассматривать через интеграл по малому замкнутому контуру γ_a, один раз огибающему точку a в положительном направлении и не захватывающему других особых точек:

$$\operatorname*{res}_a f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_a} f(z)\, dz.$$

Важную роль в теории вычетов играет теорема о полной сумме вычетов, согласно которой сумма всех вычетов мероморфной функции на компактной римановой поверхности равна нулю. С помощью этой теоремы в одномерном случае можно считать множество различных интегралов. В частности, этот факт позволяет нам решить задачу о вычислении суммы вычетов мероморфной формы $\omega = \frac{h\, dz}{z \cdot f(z)}$ в конечных ненулевых корнях многочлена $z \cdot f(z)$ (то есть в комплексном торе $\mathbb{T}^1 = \mathbb{C} \setminus 0$). В соответствии с этой теоремой, эту сумму можно выразить, используя пару слагаемых:

$$\sum_{a \in f^{-1}(0) \cap \mathbb{T}^1} \operatorname*{res}_a \omega = -\operatorname*{res}_0 \omega - \operatorname*{res}_\infty \omega.$$

Оба вычета в правой части равенства можно вычислить разложением функции $\frac{h}{z \cdot f(z)}$ в соответствующий ряд Лорана, использовав затем формулу геометрической прогрессии, принимая в качестве мажорирующего члена в знаменателе младший моном многочлена $z \cdot f(z)$ вблизи нуля и старший моном этого многочлена вблизи бесконечности. Оказывается, аналогичную задачу о сумме вычетов можно рассматривать и в многомерном случае. Сама теория многомерных вычетов восходит к Пуанкаре, который в 1887 году обобщил интегральную

[1] Работа выполнена при поддержке Красноярского математического центра, финансируемого Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение № 075-02-2025-1790).

теорему Коши и понятие вычета на случай функций двух комплексных переменных. Дальнейшее развитие происходило в ногу с революционной в 20-м веке теорией гомологий, в связке комплексного анализа с алгебраической геометрией. В многомерии связь двух концепций в определении вычета (посредством «интегралов» и «рядов») оказалась значительно богаче, сложнее и интереснее. «Интегральный» вариант определения вычета аддитивен относительно контуров интегрирования, поэтому он более эффективный для глобального представления рассматриваемой задачи. «Рядовый» вариант отражает локальные свойства полярного множества дифференциальной формы, как правило, в этом случае вычет легче вычисляется. В многомерном случае существует два основных определения вычета как числа. В первом случае вычет ассоциируется с мероморфной функцией многих комплексных переменных $g(z)$ и в качестве вычета берется коэффициент $c_{-1,\dots,-1}$ ее ряда Лорана:

$$g(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha z^\alpha.$$

Этот коэффициент можно получить с помощью интегрирования формы $\frac{1}{(2\pi i)^n} g(z) dz$ по торическому n-мерному циклу. Такие циклы приписываются различным компонентам связности дополнения к амёбе полярной гиперповерхности. Во втором случае предполагается, что аналогом функции одной комплексной переменной $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ является отображение $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ (а не функция многих комплексных переменных $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$), имеющее изолированный нуль в точке $a \in \mathbb{C}^n$. В этом случае локальный вычет мероморфной формы $\omega = \frac{h\, dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n}{f_1 \cdots f_n}$ определяется через интеграл по специальному циклу

$$\Gamma_a = \{z \in U_a : |f_j(z)| = \varepsilon_j, \quad j = 1, \dots, n\}.$$

Этот цикл является аналогом окружности в одномерном случае, за исключением того факта, что в многомерном случае этот цикл у нас подстраивается под знаменатель мероморфной функции, в то время как в одномерном случае окружность подходит для всех мероморфных функций с особенностью в данной точке.

Теперь мы можем рассмотреть задачу о полной сумме вычетов в комплексном алгебраическом торе $\mathbb{T}^n = (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ аналогичную той, что мы рассмотрели выше в одномерном случае. Пусть $f = (f_1, \dots, f_n)$ — набор полиномов Лорана от n переменных. Необходимо найти сумму всех локальных вычетов дифференциальной формы $\omega = \frac{h\, dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n}{f_1 \cdots f_n}$ в нулях $a \in f^{-1}(0) \cap \mathbb{T}^n$. Рассматриваемый вопрос о полной сумме вычетов Гротендика в рамках торической геометрии был впервые поставлен в работах А.Г. Хованского и О.А. Гельфонд [2], [17], и после в статьях И. Сопрунова [21], [29] – [31] подробно изучался с различными приложениями. Во второй главе данной диссертационной работы рассматривается особый случай для данной задачи.

Помимо многомерных вычетов мы рассматриваем различные задачи интерполяции на алгебраических множествах. Именно задание узлов интерполяции в виде нулей алгебраического множества позволяет привлечь к решению интерполяционных задач такой мощный инструмент, как теория вычетов. Чтобы удостовериться в этом рассмотрим классическую задачу Лагранжа о построении интерполяционного многочлена в одномерном случае.

Задача (Лагранжа)**.** *Задан набор различных точек* $\{w_j\}_{j=1}^m \subset \mathbb{C}$ *и значения* $c_j \in \mathbb{C}$*. Требуется найти многочлен* $f(z)$ *степени* $m-1$*, удовлетворяющий условию:*

$$f(w_j) = c_j, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Если в качестве полинома, отвечающего за узлы интерполяции, взять следующий многочлен $p(z) = (z-w_1)\cdot\ldots\cdot(z-w_m)$, то интерполяционный многочлен можно выписать по формуле с использованием вычетов:

$$f(z) = p(z)\sum_{j=1}^{m} \frac{c_j}{z-w_j} \operatorname*{res}_{w_j}\left(\frac{1}{p}\right).$$

Аналогичное наблюдение можно получить для классической одномерной задачи Эрмита.

Задача (Эрмита)**.** *Пусть* $\{w_j\}_{j=1}^m \subset \mathbb{C}$ *— набор попарно различных точек, и заданы значения*

$$c_{j,\ell} \in \mathbb{C}, \quad \text{где } j = 1, \ldots, m, \quad \ell = 0, \ldots, \mu_j - 1.$$

Требуется найти многочлен $f(z)$ *минимальной степени, который в точках* w_j *принимает заданные значения производных до порядка* $\mu_j - 1$ *включительно, то есть:*

$$f^{(\ell)}(w_j) = c_{j,\ell}, \quad j = 1, \ldots, m, \quad \ell = 0, \ldots, \mu_j - 1. \tag{1}$$

Если в качестве полинома, отвечающего за узлы интерполяции, взять следующий многочлен $p(z) = (z-w_1)^{\mu_1}\cdot\ldots\cdot(z-w_m)^{\mu_m}$, то интерполяционный многочлен Эрмита может быть представлен в виде:

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{p(z)}{(z-w_j)^{\mu_j}} \sum_{\ell=0}^{\mu_j-1} \frac{c_{j,\ell}}{\ell!}\left(\sum_{s=0}^{\mu_j-\ell-1} (z-w_j)^{\ell+s} \operatorname*{res}_{w_j}\left(\frac{(z-w_j)^{\mu_j-1-s}}{p}\right)\right),$$

то есть снова с участием вычетов. Одной из целей данного диссертационного исследования является построение интерполяционного многочлена для многомерной интерполяции Эрмита в случае специального полиномиального отображения. Данный результат получен в виде теоремы 3.2.2 в третьей главе диссертации. В этой же главе, мы рассматриваем так называемые нестандартные интерполяции, появившиеся в недавних статьях (см. [8]; [9]). В них ставится задача о построении функции f на алгебраическом множестве $p^{-1}(0)$ (рассматриваемом как аналитическое пространство), значения которой лежат на заданной гиперповерхности, что вновь позволяет использовать теорию вычетов в качестве инструмента для решения таких интерполяционных задач. Более точно, в статье [8] рассматривается следующая задача:

Задача (в пространстве $\mathbb{C}$)**.** *Пусть заданы комплексные числа*

$$a_{j,\ell}, \;\; j = 1, \ldots, m; \;\; \ell = 0, \ldots, \mu_j - 1 \text{ и } c.$$

Необходимо описать множество всех функций f, голоморфных в окрестности U точек $w_1, \ldots, w_m \in \mathbb{C}$ и удовлетворяющих следующему равенству:

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{\ell=0}^{\mu_j - 1} a_{j,\ell} \mathcal{L}_{j,\ell}[f](w_j) = c.$$

В аналогичной форме нестандартную задачу можно поставить и в многомерном случае, трактуя узлы интерполяции $w_1, \ldots, w_m \in \mathbb{C}^n$ как нули идеала $\langle \boldsymbol{p} \rangle = \langle p_1(\boldsymbol{z}), \ldots, p_n(\boldsymbol{z}) \rangle$ кольца многочленов переменной $\boldsymbol{z}$ из $\mathbb{C}^n$ (см. [9]):

Задача (в пространстве $\mathbb{C}^n$)**.** *Пусть $\boldsymbol{p}^{-1}(0) = \{w_1, \ldots, w_m\}$ и U — открытое подмножество $\mathbb{C}^n$, содержащее $\boldsymbol{p}^{-1}(0)$. Пусть $a_{j,\boldsymbol{\ell}}$ ($j = 1, \ldots, m,$ $\boldsymbol{\ell} \in A_{w_j}$) вместе с числом c — заданные комплексные числа. Необходимо описать пространство голоморфных функций $f : U \to \mathbb{C}$, со свойством:*

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{\boldsymbol{\ell} \in A_{w_j}} a_{j,\boldsymbol{\ell}} \mathcal{L}_{w_j,\boldsymbol{\ell}}[f](w_j) = c.$$

Операторы $\mathcal{L}_{j,\ell}[f]$ в многомерном случае вычислять значительно труднее. Они называются нётеровскими операторами идеала $\langle \boldsymbol{p} \rangle$. В работе на нетривиальном примере будет продемонстрирован алгоритм вычисления нестандартной интерполяции.

В последней главе данного диссертационного исследования рассматриваются два варианта построения многомерных аналогов множителя Бляшке. Дело в том, что в одномерном случае, понятие произведения Бляшке позволило решить важные задачи интерполяционной теории в единичном диске [11]. Так, например, теорема Бляшке утверждает, что последовательность $\{z_k\}$ в диске является нулевым множеством для ограниченной в D голоморфной функции тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|).$$

Кроме случая ограниченных функций, аналогичные описания были получены для функций из классов Харди. Недавно вышла статья [10] с интерполяционными задачами в пространствах Харди, и мы рассчитываем в дальнейшем применить наши варианты многомерных аналогов множителей Бляшке для решения новых интерполяционных задач, связанных с пространствами Харди.

Целью диссертации является получение аналога формулы Гельфонд—Хованского для суммы локальных вычетов Гротендика в двумерном комплексном торе в случае неразвернутых многогранников Ньютона, решение задачи многомерной интерполяции Эрмита для одного класса полиномиальных отображений, построение нестандартной интерполяции Алпая—Ижера, а также получение многомерного аналога множителя Бляшке.

Задачи диссертации:

1. Обобщить формулу Гельфонд—Хованского для суммы локальных вычетов Гротендика в двумерном комплексном торе на случай неразвернутых многогранников Ньютона.

2. Получить явную формулу многомерной интерполяции Эрмита для одного класса полиномиальных отображений.

3. Описать алгоритм вычисления нестандартной интерполяции Алпая—Ижера и привести демонстрацию алгоритма на основе нетривиального примера алгебраических узлов.

4. Получить многомерные аналоги множителей Бляшке.

Научная новизна. Результаты работы являются новыми. Построен нетривиальный пример нестандартной интерполяции Алпая—Ижера. Получена явная формула многомерной интерполяции Эрмита в случае нулей системы одного класса полиномиальных отображений. Двумя способами построен многомерный аналог множителей Бляшке, в частности, с использованием многочленов Ли—Янга. Получена формула суммы локальных вычетов Гротендика в двумерном комплексном торе для случая неразвернутых многогранников Ньютона.

Практическая и теоретическая ценность. Результаты, полученные автором, являются теоретическими. Они могут быть применимы при решении интерполяционных задач, а также для поиска сумм локальных вычетов Гротендика от дифференциальных форм в двухмерном комплексном торе. Также результаты могут использоваться в специальных курсах для бакалаворв, магистров и аспирантов университетских математических кафедр.

Методология и методы исследования. В диссертационной работе, в основном, используются методы теории функций многих комплексных переменных, в частности, методы теории многомерных вычетов. Кроме того, задействованы стандартные методы теории гомологий, а также методы теории идеалов.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах.

1. Всероссийская с международным участием научно-методическая конференция «Информационные технологии в математике и математическом образовании», 2020 г., г. Красноярск.

2. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Проспект Свободный» в 2019, 2021 и 2023 гг., г. Красноярск.

3. Международная конференция по математическому анализу и дифференциальным уравнениям, 2022 г., г. Цахкадзор, Армения.

4. Конференция «Комплексный анализ и его приложения», 2023 г., г. Красноярск.

5. Третья конференция математических центров России, 2023 г., г. Майкоп.

6. Конференция «Комплексный анализ и геометрия», 2024 г., г. Сочи.

7. Всероссийская с международным участием научно-методическая конференция «Математика и математическое образование в эпоху цифровизации», 2024 г., г. Красноярск.

8. Красноярский городской семинар по многомерному комплексному анализу и алгебраической геометрии, 2021–2025 г., г. Красноярск.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 7 работах [38]– [43], из которых 3 работы ([38]– [39]) изданы в журналах из списка ВАК (квартиль К1), они индексируются в наукометрических базах Web Of Science и Scopus (квартили Q2-Q3). Результаты работы [38] получены автором самостоятельно. Совместные работы находятся в нераздельном соавторстве, при этом вклад автора в теорему 3.2.2 является решающим, вклад автора и научного руководителя в теорему 2.3.5 является равнозначным.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения. Полный объем диссертационной работы составляет 88 страниц. Список литературы содержит 43 наименования. Иллюстративный материал: 13 рисунков.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

К **основным результатам** диссертации относятся следующие.

1. В двумерной ситуации получено обобщение формулы Гельфонд—Хованского на случай неразвернутых многогранников Ньютона.

2. Получена явная формула многомерной интерполяции Эрмита с одним классом алгебраических узлов.

3. Построен локальный вариант нестандартной интерполяции Алпая—Ижера для нетривиального задания алгебраических узлов.

4. Получены многомерные аналоги множителя Бляшке, в частности с использованием полинома Ли—Янга.

В **первой главе** настоящей работы приводятся основные концепции определения вычета в многомерном случае. Также даются определения вычета Гротендика, цикла Гротендика и глобального вычета Гротендика. Затем мы вводим понятие амебы полинома Лорана, а также приводим основные свойства амеб алгебраических гиперповерхностей. В последнем параграфе данной главы мы вводим предварительные сведения, касающиеся нульмерных полиномиальных идеалов, нётеровских операторов, а также приводим сведения, касающиеся базисов Гребнера.

В первом параграфе **второй главы** данного исследования мы вводим формулу представления локального вычета Гротендика в виде $(2n-1)$-мерного интеграла, формулу преобразования локального вычета, а также некоторые свойства вычетов Гротендика. Эти сведения понадобятся нам при доказательстве теорем. Помимо этого в этом параграфе мы уделяем внимание связи вычетов Гротендика с потоками. Во втором параграфе этой главы мы вводим стандартный бикомплекс Чеха и Майера—Виеториса, а также вводим важное понятие резольвенты цикла. Для формулировки известного результата Гельфонд—Хованского нам понадобится определение комбинаторного коэффициента. Приписываемый вершине ν многогранника суммы Минковского Δ комбинаторный коэффициент k_ν — это локальная степень ростка отображения

$$H|_{\partial\Delta} : (\partial\Delta, \nu) \to (\partial\mathbb{R}^n_+, 0),$$

где H — непрерывное отображение

$$H : \Delta \to \mathbb{R}^n, H = (h_1, \ldots, h_n),$$

у которого каждая составляющая h_i неотрицательна и обращается в нуль только на тех гранях $\Gamma = \Gamma_1 + \ldots + \Gamma_n$, для которых слагаемое Γ_i является вершиной многогранника Δ_i. Ограничение отображения H на границу $\partial\Delta$ многогранника Δ переводит окрестность каждой его вершины ν в окрестность начала координат на границе положительного ортанта $\mathbb{R}^n$. Коэффициент k_ν не зависит (см. [17] или [30]) от выбора непрерывного отображения H, а его знак зависит только от выбора ориентаций многогранника и положительного ортанта $\mathbb{R}^n$, поэтому данное определение является корректным. В третьем параграфе, после приведения необходимых определений, формулируется результат Гельфонд—Хованского

Теорема 2.3.3. [17] *Пусть многогранники Ньютона $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ полиномов $f_1, \ldots, f_n$ развернуты. Тогда сумма всех локальных вычетов в торе $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$ вычисляется по формуле:*

$$\sum_{\{a\}} \underset{a}{\mathrm{res}_f}\,(h) = \sum_{\nu \in \mathrm{Vert}\,\Delta} k_\nu \,\mathrm{res}_{E_\nu} \left(\frac{h}{f_1 \ldots f_n} \right),$$

где res_{E_ν} — коэффициент c_{-I} лорановского разложения функции $\frac{h}{f_1 \cdots f_n}$ в связной компоненте E_ν, а k_ν — комбинаторные коэффициенты. Для наглядности рассматривается следующий пример Перед формулировкой основного результата второй главы для наглядности рассматривается следующий примеррассматривается следующий пример

$$f_1 = 3z_1^2 z_2 + z_2^4 + 2z_1 z_2^3, \quad f_2 = z_1^3 + 4z_1 z_2^3 + 3z_1^2 z_2^2.$$

Заметим, что в этой системе многочленов от двух переменных многогранники Ньютона находятся в неразвернутом положении. Они имеют параллельные ребра с совпадающими внутренними нормалями, а это не подходит под определение развернутости. На самом деле, наличие даже одной пары таких ребер ломает развернутость многогранников, а в данном примере все ребра попарно являются таковыми. Далее в конце данной главы доказывается теорема, решающая задачу вычисления суммы локальных вычетов Гротендика в двумерном комплексном торе.

Теорема 2.3.5. [39] *Если число корней отображения f конечно, то сумма вычетов Гротендика в торе $(\mathbb{C}\setminus\{0\})^2$ представляется как линейная комбинация интегралов по торическим циклам*

$$\sum_{\{a\}} \underset{a}{\mathrm{res}_f}\,(h) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^2 \cap \partial\Delta} k_\nu \,\mathrm{res}_{E_\nu} \left(\frac{h}{f_1 \cdot f_2} \right).$$

В **третьей главе** диссертационной работы рассматриваются интерполяционные задачи на алгебраических множествах. В первом параграфе вводятся стандартные интерполяционные задачи, а также выписываются явные формулы для их решений с участием вычетов Гротендика.

Во втором параграфе формулируется многомерная задача Эрмита в случае алгебрачеcких узлов.

Задача. *Для заданных значений* $\{c_{w,\ell}\}$, $w \in \boldsymbol{p}^{-1}(0); \ell \in A_w$, *найти многочлен* $f(z)$, *удовлетворяющий условию:*

$$\frac{\partial^{|\ell|} f}{\partial z^\ell}(w) = c_{w,\ell}, \qquad w \in \boldsymbol{p}^{-1}(0), \qquad \ell \in A_w,$$

где $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$ *и* $|\ell| = \ell_1 + \ldots + \ell_n$.

Чтобы решить сформулированную задачу Эрмита конструктивно (в виде явной формулы), в работе рассматривается класс полиномиальных отображений [23] $\boldsymbol{p} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, которые в каждом корне $w \in \boldsymbol{p}^{-1}(0)$ обладают следующими свойствами.

$$\frac{\partial^{|\ell|} p_i}{\partial z^\ell}(w) = 0, \quad 0 \le \ell \le d_w - I, \tag{3.2.1}$$

$$\det \left|\left| \frac{\partial^{d_k} p_i}{\partial z_k^{d_k}}(w) \right|\right| \ne 0 \quad (\text{здесь } i, k = 1, \ldots, n), \tag{3.2.2}$$

где $d_k = (d_w)_k$ — координаты вектора d_w.

Далее в работе формулируется теорема 3.2.2, решающая данную задачу, доказательство к которой приведено в конце второго параграфа данной главы.

Теорема 3.2.2. [37] *Предположим, что для каждого корня* $w \in \boldsymbol{p}^{-1}(0)$ *существует вектор* $d_w \in \mathbb{Z}_+^n$, *для которого выполнены свойства (3.2.1) и (3.2.2). Тогда многочлен* $f(z)$, *определяемый выражением:*

$$\sum_{w \in \boldsymbol{p}^{-1}(0)} \det H_w(z) \left[\sum_{\substack{\ell \le d_w - I \\ k \le d_w - I - \ell}} \frac{c_{w,\ell}}{\ell!} (z-w)^{\ell+k} \operatorname*{res}_w \left(\frac{(z-w)^{d_w - I - k}}{\boldsymbol{p}^I} \right) \right],$$

решает многомерную задачу Эрмита с узлами $w \in \boldsymbol{p}^{-1}(0)$, *где* $H_w(z) = ||h_{ik}||$ *— матрица из представления:*

$$\begin{pmatrix} p_1(z) \\ \vdots \\ p_n(z) \end{pmatrix} = ||h_{ik}|| \begin{pmatrix} (z_1 - w_1)^{d_1} \\ \vdots \\ (z_n - w_n)^{d_n} \end{pmatrix}. \tag{3.2.4}$$

Далее в работе рассматривается небольшой пример реализации данной теоремы, после чего доказывается вспомогательная лемма 3.2.3, доказывающая существование представления (3.2.4) в теореме.

В конце второго параграфа досказывается основная теорема 3.2.2 о многомерных нестандартных интерполяциях Эрмита.

В третьем параграфе формулируются так называемые нестандартные интерполяции Алпая–Ижера в одномерном и многомерном случаях. Далее в начале четвертого параграфа формулируется задача локальной нестандартной интерполяции

Задача *Пусть $p = (p_1, \ldots, p_n)$ — идеал с изолированным нулем в начале координат. Обозначим $\{\mathcal{L}_{0,\ell}\}$ набор нётеровских операторов для примарной компоненты в нуле этого идеала. Требуется описать множество голоморфных ростков в начале координат с условием*

$$\sum_{\ell} a_\ell \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathbf{0},\ell}[f](\mathbf{0}) = c,$$

где $\{a_\ell\}$ и c — заданные числа.

Затем приводятся все выкладки построения локальной нестандартной интерполяции в окрестности нуля пространства $\mathbb{C}^3$ для отображения

$$\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3) = (z_1^3 - z_2 z_3, z_2^3 - z_1 z_3, z_3^3 - z_1 z_2),$$

задающего нульмерный полиномиальный идеал.

В конце четвертого параграфа третьей главы приводится основной результат о нестандартной интерполяции.

Теорема 3.4.1. [39] *Если координаты ростка $h_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{s})$ не все равны нулю, то голоморфная функция $f(\boldsymbol{s})$ является решением локальной нестандартной задачи в окрестности нуля пространства $\mathbb{C}^3$ для отображения*

$$\boldsymbol{p} = (z_1^3 - z_2 z_3, z_2^3 - z_1 z_3, z_3^3 - z_1 z_2),$$

тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие на коэффициенты этой функции в факторпространстве $H(U_{\mathbf{0}})/(\sum_1^n H(U_{\mathbf{0}})p_j)$:

$$\left(a_{000} + a_{111} - \frac{a_{400} + a_{040} + a_{004}}{24}\right)\alpha_1[f] + \left(a_{011} + \frac{a_{300}}{6}\right)\alpha_2[f] +$$
$$+ \left(a_{101} + \frac{a_{030}}{6}\right)\alpha_3[f] + \left(a_{110} + \frac{a_{003}}{6}\right)\alpha_4[f] + \frac{a_{200}}{2}\alpha_5[f] +$$
$$\frac{a_{020}}{2}\alpha_6[f] + \frac{a_{002}}{2}\alpha_7[f] + a_{001}\alpha_8[f] + a_{010}\alpha_9[f] + a_{001}\alpha_{10}[f] + a_{000}\alpha_{11}[f] = -c.$$

В начале **четвертой главы** диссертационной работы приводится определение одномерного произведения Бляшке, а также некоторые его свойства. В первом параграфе данной главы приводится определение многочлена Ли—Янга, с помощью которого мы строим многомерный аналог множителей Бляшке в $\mathbb{C}^3$. Более точно, из многочлена Ли—Янга

$$f = (z_1z_2z_3 + bcz_1z_2 + abz_2z_3 + acz_1z_3) + (abz_1 + acz_2 + bcz_3 + 1)$$

мы строим набор функций $p_1, q_1, p_2, q_2, p_3, q_3$, которые позволяют нам ввести следующее определение.

Определение 4.1.3. [38] *Отображение* $\left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}\right)$ *назовем трехмерным аналогом множителя Бляшке, если нули многочлена* $f_2 = abz_1 + acz_2 + bcz_3 + 1$ *не пересекают открытый единичный полидиск* D^3 *(в этом случае* q_i *будем называть допустимыми).*

Оказывается, произведение Бляшке является внутренней функцией. Поэтому далее в этом параграфе доказываются две теоремы, показывающие, что введенное в работе определение соответствует этому свойству.

Теорема 4.1.6. [38] *Функции* p_j/q_j *в определении множителя Бляшке являются внутренними функциями в поликруге* D^3.

Теорема 4.1.8. [38] *Знаменатели* q_i *являются допустимыми тогда и только тогда, когда попарные произведения* $(ab, ac, bc) = (x, y, z)$ *лежат в поляре и удовлетворяют системе неравенств:*

$$\begin{cases} 1 > \frac{yz}{x} > 0, \\ 1 > \frac{xz}{y} > 0, \\ 1 > \frac{xy}{z} > 0. \end{cases}$$

Во втором параграфе данной главы приводится другой подход к определению многомерного аналога множителей Бляшке.

В этом случае сначала фиксируется многочлен следующего вида

$$q(z_1, \ldots, z_n) = 1 + \zeta_1 z_1 + \ldots + \zeta_n z_n,$$

где $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \{(z_1, \ldots, z_n) \in D^n : \ |z_1| + \ldots + |z_n| \leq 1\}$. После чего строится следующий согласованный многочлен

$$p(z_1, \ldots, z_n) = z_1 \cdot \ldots \cdot z_n \cdot \overline{q(1/\bar{z}_1, \ldots, 1/\bar{z}_n)}.$$

Используя эти многочлены, определяется набор функций $\{p_i, q_i\}_{i=1,\ldots,n}$, с помощью которых вводится следующее определение

Определение 4.2.1. [38] *Отображение* $\left(\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_n}{q_n}\right)$ *назовем многомерным аналогом множителя Бляшке.*

В конце второго параграфа четвертой главы доказывается теорема

Теорема 4.2.2. [38] *Функции* p_j/q_j *в определении 4.2.1 многомерного аналога множителя Бляшке являются внутренними функциями в поликруге* D^n.

Список литературы

[1] Ван дер Варден Б. Алгебра / Б. Ван дер Варден. — М: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979. — 623 с.

[2] Гельфонд О. Комбинаторные коэффициенты и смешанный объем многогранни- ков / О. Гельфонд // Функц. анализ и его прил. — 1996. — Т. 30, №3. — С. 77–79.

[3] Кокс Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры : монография / Д. Кокс, Дж. Литтл, Д. О'Ши ; Пер. с англ. — М. : Мир, 2000. — 687 с.

[4] Паламодов В. П. Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами : монография / В. П. Паламодов. — М. : Наука, 1967. — 488 с.

[5] Цих А. Многомерные вычеты и их применения : монография / А. Цих. — Новосибирск : Наука. Сиб. отд-ние, 1988. — 241 с.

[6] Шабат Б. Введение в комплексный анализ, ч. II, изд. 2-е / Б. Шабат. — М : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1976. — 400 с.

[7] Aizenberg I. Integral representations and residues in multidimensional complex analysis : monograph / I. Aizenberg, A. Yuzhakov ; Translated from the Russian by H. H. McFaden. Translation edited by Lev J. Leifman. Translations of Mathematical Monographs. — Providence : American Mathematical Society, RI, 1983. — V. 58. — 283 p.

[8] Alpay D. A new realization of rational functions, with applications to linear combination interpolation, the Cuntz relations and kernel decompositions / D. Alpay, P. Jorgensen, I. Lewkowicz, D. Volok // Complex Var. Elliptic Equ. — 2016. — V. 61(1). — P. 42–54.

[9] Alpay D. About a Non-Standard Interpolation Problem / D. Alpay, A. Yger // Comput. Methods Funct. Theory. — 2019. — V. 19. — P. 97–115.

[10] Alpay D. Cauchy-Weil formula, Schur-Agler type classes, new Hardy spaces of the polydisk and interpolation problems / D. Alpay, A. Yger // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2021. — V. 504(2).

[11] Blaschke W. Eine Erweiterung des Satzes von Vitali über Folgen analytischer Funktionen / W. Blaschke // Berichte Math.-Phys. Kl. (in German). Sächs. Gesell. der Wiss. Leipzig —1915. — V. 67. — P. 194–200.

[12] Coleff N. Les courants residuals associes a une forme meromorphe / N. Coleff, M. Herrera. — Lect. Not. Math., 1978. —211 p.

[13] De Boor, C. On multivariate polynomial interpolation / C. De Boor, A. Ron // Constructive Approximation. —1990. —V. 6, №3. — P. 287 – 302.

[14] Ehrenpreis L. Fourier analysis in several complex variables / L. Ehrenpreis. — Wiley-Interscience Publishers, 1970. — 506 p.

[15] Forsberg M. Laurent Determinants and Arrangements of Hyperplane Amoebas / M. Forsberg, M. Passare, A. Tsikh // Advances in Mathematics. — 2000. — V. 151. — P. 45 – 70.

[16] Gel'fand I. Hypergeometric functions and toral manifolds / I. Gel'fand, M. Kapranov, A. Zelevinskii // Funct Anal Its Appl. — 1989. — V. 23. — P. 94 – 106.

[17] Gelfond O. Toric geometry and Grothendieck residues / O. Gelfond, A. Khovanskii // Mosc. Math. J. — 2002. — V. 2, №1. — P. 99 – 112.

[18] Gleason A. The Cauchy-Weil theorem / A. Gleason // J. Math. Mech. — 1963. — №12. — P. 429 – 444.

[19] Gracia S. Finite blaschke products: a survey / S. Gracia, J. Mashreghi, W. Ross. — Math and Computer Science Faculty Publications, 2018. — 181 p.

[20] Griffiths P. Principles of algebraic geometry : monograph / P. Griffiths, J. Harris ; Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience. — New York : John Wiley and Sons, 1978. — 813 p.

[21] Khetan A. Combinatorial construction of toric residue / A. Khetan, I. Soprounov // Ann. Inst. Fourier, Grenoble — 2005. — V. 55, №2. — P. 511 – 548.

[22] Lee T. D. Statistical theory of equations of state and phase transitions / T. D. Lee, C. N. Yang // Physical Rev. — 1952. — №87. — P. 404–419.

[23] Leinartas E. On a Multidimentional Version of the Principal Theorem of Difference Equations with constant Coeffitients/ E. Leinartas, A. Tsikh // J. of Siberian Federal University. Math and Phys — 2022. —V. 15, №1. — P. 125 – 132.

[24] Milnor J. Singular points of complex hypersurfaces : monograph / J. Milnor // — New Jersey : Annals of Mathematics Studies, 1968. — V.61. — 122 p.

[25] Nabeshima K. Computing Grothendieck point residues via solving holonomic systems of first order partial differential equations / K. Nabeshima,

S. Tajima // ISSAC ‘21 Proceedings of the 2021 on International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. —2021. — P. 361–368.

[26] Passare M. Amoebas: their spines and their contours / M. Passare, A. Tsikh // Contemporary Mathematics — 2005. — №377. — P. 275–288.

[27] Rockafellar R. Convex analysis / R. Rockafellar. — Princeton, New Jersey : Princeton University Press, 1970. — 472 p.

[28] Rudin W. Function Theory in Polydiscs / W. Rudin. — W. A. Benjamin, 1969. — 188 p.

[29] Soprounov I. On combinatorial coefficients and the Gelfond – Khovanskii residue formula / I. Soprounov // Topics in algebraic geometry and geometric modeling. - Contemp. Math., — 2003. — V. 334. — P. 343–349.

[30] Soprounov I. Residues and tame symbols on toroidal varieties / I. Soprounov // Compositio Math. — 2004. — V. 140, №6. — P. 1593–1613.

[31] Soprounov I. Toric residue and combinatorial degree / I. Soprounov // Trans. Amer. Math. — 2005. — V. 357, №5. — P. 1963–1975.

[32] Tsikh A. Multidimensional Residues and Their Applications (English summary) : monograph / A. Tsikh ; Translated from the 1988 Russian original by E. J. F. Primrose Translations of Mathematical Monographs, 103. — Providence : American Mathematical Society, RI, 1992. — 188 p.

[33] Tsikh A. Residue currents / A. Tsikh, A. Yger // Complex analysis. J. Math. Sci. —2004. — V.120. -№6. —P. 1916 – 1971.

[34] Ulvert R. Homological Resolutions in Problems About Separating Cycles / R. Ulvert // Siberian Mathematical Journal. —2018. — №59. — P. 542–550.

[35] Van der Waerden B. Algebra. Vol. I. : monograph / B. Van der Waerden ; Based in part on lectures by E. Artin and E. Noether. Translated from the seventh German edition by Fred Blum and John R. Schulenberger. — New York : Springer-Verlag, 1991. — 265 p.

[36] Vidras A. Bergman-Weil expansion for holomorphic functions/ A. Vidras, A. Yger // Mathematische Annalen. — 2022. — V. 382. - №6. — P. 383 – 419.

Работы автора по теме диссертации

[37] Durakov M. E. Multidimensional Hermite Interpolation / M. E. Durakov, E. D. Leinartas, A. K. Tsikh // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2023. — V. 20, №2. — P. 700 – 710.

[38] Durakov M. E. On the Blaschke Factors in Polydisk / M. E. Durakov // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. — 2023. — V. 16, №2. — P. 245 – 252.

[39] Durakov M. E. On the Non-standard Interpolations in $\mathbb{C}^n$ and Combinatorial Coefficients for Weil Polyhedra / M. E. Durakov, R. V. Ulvert, A. K. Tsikh // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. — 2023. — V. 16, №6. — P. 758 – 772.

[40] Дураков М. Е. О нестандартных многомерных интерполяционных задачах / М. Е. Дураков // Материалы XV Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, "Проспект Свободный — 2019" / Сибирский федеральный университет. — Красноярск, 2019. — С. 1062.

[41] Дураков М. Е. О нестандартных интерполяциях функций многих переменных / М. Е. Дураков // Материалы IX Всероссийской с международным участием научно-методической конференции. "Информационные технологии в математике и математическом образовании" / Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева. — Красноярск, 2020. — С. 22 – 25.

[42] Дураков М. Е. О многомерном аналоге произведения Бляшке / М. Е. Дураков // Материалы XVII Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, "Проспект Свободный — 2021" / Сибирский федеральный университет. — Красноярск, 2021. — С. 1709 – 1711.

[43] Дураков М. Е. О многомерной интерполяции Эрмита / М. Е. Дураков // Материалы XIX Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, "Проспект Свободный — 2023" / Сибирский федеральный университет. — Красноярск, 2023. — С. 3213 – 3215.